

**Université de Cergy-Pontoise Juin 2012**  
**SV-S1- Maths pour les Sciences**  
L1, seconde session

*Durée 1 heure 30, documents interdits, calculatrice autorisée*

**Premier Exercice - nombres complexes - 5 points**

On suppose que le nombre complexe  $z$  vérifie l'égalité :

$$2z + i\bar{z} = 1 + i$$

1. Montrer que  $z$  vérifie également l'égalité :

$$2\bar{z} - iz = 1 - i$$

2. En éliminant  $\bar{z}$  entre ces deux égalités, calculer la valeur de  $z$ .
3. Montrer qu'il n'existe aucun nombre complexe  $u$  tel que  $u - \bar{u} = 1 + i$

**Second Exercice - fonctions et intégration -8 points**

On note  $I$  l'intervalle  $I = ]0, +\infty[$  et on considère les deux fonctions définies sur  $I$  par :

$$f(x) = x \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 \ln x$$

1. Montrer que, pour tout  $x$  de  $I$ , on a  $f(x) \leq g(x)$ .
2. Déterminer le tableau de variation de  $f$ . On précisera les limites de  $f$  lorsque  $x$  tend vers 0 et lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
3. Déterminer le tableau de variation de  $g$ . On précisera les limites de  $g$  lorsque  $x$  tend vers 0 et lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .
4. Tracer les courbes représentatives de  $f$  et de  $g$  sur le même graphique.
5. Calculer, au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale

$$F(x) = \int_1^x t \ln t dt$$

et vérifier que c'est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

**Troisième exercice - Équations différentielles -7 points**

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y' + 2xy = x$$

On commencera par résoudre l'équation sans second membre et on montrera qu'il y a une solution particulière constante.

2. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + y' + y = 2x + 1$$

On commencera par résoudre l'équation sans second membre, et on cherchera une solution particulière  $y_0$  de l'équation complète de la forme :  $y_0(x) = ax + b$  où  $a$  et  $b$  sont des réels à déterminer.