Université de Cergy-Pontoise
Janvier 2012

Épreuve de Mathématiques

SV S1

Durée 2 heures, documents interdits

Premier Exercice - 6 points

On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^6 + 1 = 0 \qquad (E)$$

1. Montrer que si z est solution de (E), alors $|z| = 1$.
2. Montrer que $z_0 = i$ et $z_1 = -i$ sont solutions.
3. Vérifier que
$$z^6 + 1 = (z^2 + 1)(z^4 - z^2 + 1)$$
4. En posant $w = z^2$, montrer que l'équation
$$z^4 - z^2 + 1 = 0$$
est équivalente à l'équation d'inconnue w
$$w^2 - w + 1 = 0$$
que l'on résoudra.
5. Vérifier que
$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
et déterminer de la même façon les quatre solutions complexes de $z^4 - z^2 + 1 = 0$.

Second Exercice - 6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x - 1)^2 e^x$$

1. Déterminer les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
2. Calculer la dérivée de f, déterminer son signe et dresser le tableau de variation de f.
3. Dessiner la courbe représentative de f. On rappelle que
$$e = 2,718..., \qquad \frac{1}{e} = 0,368...$$
4. Déterminer l'aire de la région limitée par la courbe représentative de f, l'axe Ox et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$. On sera amené à faire deux intégrations par parties.

Troisième Exercice - 4 points

On veut résoudre l'équation différentielle

$$(x^2-1)y' - (x+2)y = x+1$$

sur l'intervalle $I =]-1, 1[$.

1. Trouver deux nombres réels a et b tels que :

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

   pour tout x de I.

2. Résoudre l'équation sans second membre

$$(x^2-1)y' - (x+2)y = 0$$

   On exprimera les solutions sans utiliser la fonction exponentielle.

3. Résoudre l'équation complète en cherchant une solution particulière de la forme :

$$y_0(x) = \alpha x + \beta$$

   où α et β sont des réels que l'on déterminera.

Quatrième Exercice - 4 points

On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$y'' - y' = 2e^x$$

1. Résoudre l'équation sans second membre sur $\mathbb{R}$.
2. Chercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme

$$y_0(x) = axe^x$$

   où a est un réel à déterminer et en déduire toutes les solutions de l'équation complète.