

Épreuve de Mathématiques
S3 SV S1

Durée 2 heures, documents et calculatrice interdits

Premier Exercice - 5 points

Les deux questions sont indépendantes. La question marquée par une étoile est un peu plus difficile.

1. Soit (E) l'équation

$$z^3 + (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z + 2i = 0$$

dont l'inconnue est le nombre complexe z . Montrer que

$$z^3 + (2 + i)z^2 + 2(1 + i)z + 2i = (z + i)(z^2 + 2z + 2)$$

En déduire les trois solutions de l'équation (E) .

2. (a) On s'intéresse à l'équation (F) :

$$z + |z| = 1$$

Montrer que si z est solution, alors z est réel. En déduire la solution de l'équation (F)

- (b) (*) Montrer que l'équation (G) :

$$z + |z| = i$$

n'admet aucune solution.

Second Exercice - 4 points Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^x - e^{2x}$$

- Déterminer les limites de f lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
- Calculer la dérivée de f , déterminer son signe et dresser le tableau de variation de f .
- Dessiner la courbe représentative de f . On pourra utiliser le tableau ci-dessous.

$\ln 2 \sim 0.7$	$\ln 3 \sim 1.1$	$\ln 5 \sim 1.6$	
$e \sim 2.7$	$e^{-1} \sim 0.37$	$e^2 \sim 7.4$	$e^{1/2} \sim 1.6$

Troisième Exercice - 6 points

1. Trouver deux nombres réels a et b tels que :

$$\frac{1}{x^2 - 4} = \frac{a}{x - 2} + \frac{b}{x + 2}$$

pour tout x .

2. Calculer l'intégrale suivante, en faisant le changement de variable $x = e^t$:

$$\int_1^2 \frac{dt}{e^t - 4e^{-t}}$$

3. Calculer l'intégrale suivante

$$\int_0^1 \frac{x + 2}{x^2 + 1} dx$$

Quatrième Exercice - 5 points

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1.

$$(1 - x^2)y' + xy = 0$$

On se limitera à l'intervalle $I =] - 1, 1[$.

- 2.

$$y'' - 2y' + y = x + 1$$

On commencera par résoudre l'équation sans second membre. Pour l'équation complète, on cherchera une solution particulière de la forme :

$$y = ax + b$$

où a et b sont deux réels à déterminer.