Université de Cergy-Pontoise Novembre 2009
SVT-S1- Maths pour les Sciences
L1
Contrôle continu - Durée 2 heures, documents et calculatrice interdits

---

Premier Exercice - 7 points

On cherche à démontrer l'inégalité :

$$\forall x > 0,\ 1 - \frac{1}{x} \leq \ln x \leq x - 1$$

1. Soit ϕ la fonction sur $]0, +\infty[$ définie par : $\phi(x) = x - 1 - \ln x$ Étudier les variations de cette fonctions, et déduire du tableau de variations que pour tout $x > 0$, $\phi(x) \geq 0$.
2. Étudier de même les variations de la fonction ψ définie par : $\psi(x) = \ln x - 1 + \frac{1}{x}$ et en déduire l'inégalité proposée.

Deuxième Exercice - 7 points

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de f est $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. Étudier la limite de f lorsque x tend vers 0, puis lorsque x tend vers 1, enfin lorsque x tend vers $+\infty$
3. Étudier les variations de f. Dresser le tableau de variation de f.
4. Montrer que la fonction g définie sur $D' = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ par :

$$g(0) = 0 \ \text{ et } \ g(x) = f(x) \ \text{ si } \ x \neq 0$$

   est continue et dérivable en 0.

Troisième Exercice - 6 points

Les trois questions sont indépendantes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 + 2z + 2 = 0$$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z + 3\overline{z} = 3 - i$$
3. Soit (E) l'équation :
$$z^3 - (1+i)z^2 + (1+i)z - i = 0$$
   (a) Montrer que i est une solution de cette équation.
   (b) Trouver toutes les solutions de l'équation (E).