Université de Cergy-Pontoise Janvier 2010
SVT-S1-L1 Maths pour les Sciences
Examen - Durée 2 heures, documents et calculatrice interdits

Premier Exercice - 6 points

On s'intéresse à la fonction : $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x - x}$

1. En étudiant les variations de $g(x) = e^x - x$, montrer que pour tout x réel, $g(x) \geq 1$ et en déduire que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) \qquad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x)$$
En déduire que la courbe représentative de f a deux asymptotes que l'on précisera.
3. Calculer en fonction de l'entier n l'intégrale :
$$I_n = \int_0^n f(x)dx$$
4. Montrer que $\lim_{n \to +\infty} (I_n - n) = 0$

Deuxième Exercice - 7 points

1. Résoudre, sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, l'équation
$$y' - \left(1 - \frac{1}{x}\right) y = 1$$
On commencera par résoudre l'équation sans second membre puis on appliquera la méthode de variation de la constante.
2. On veut résoudre l'équation différentielle : $4y'' - 4y' + 5y = 5x^2 + 7x + 1$.
   (a) Résoudre l'équation sans second membre.
   (b) Chercher une solution particulière de l'équation complète qui soit un polynôme du second degré.
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation complète.

Troisième Exercice - 7 points

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^2 - (1 + \sqrt{2})Z + \sqrt{2} = 0$.
On vérifiera que les solutions sont $Z_1 = 1$ et $Z_2 = \sqrt{2}$.
2. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (F)
$$z^4 - (1 + \sqrt{2})z^3 + (2 + \sqrt{2})z^2 - (1 + \sqrt{2})z + 1 = 0$$
On pose $Z = z + \frac{1}{z}$. Calculer Z^2 et, en mettant z^2 en facteur dans l'équation (F), montrer que si z est solution de (F), alors Z vérifie l'équation (E).
3. Résoudre l'équation (F). On trouvera quatre solutions complexes.
4. Montrer que le premier membre de l'équation (F) peut se factoriser en :
$$(z^2 - z + 1)(z^2 - \sqrt{2}z + 1)$$
et en déduire à nouveau les solutions de (F).