

Université de Cergy-Pontoise
Janvier 2009
L1-SV Mathématiques pour les Sciences
L1

Première session - Durée 2 heures, documents et calculatrices interdits

Premier Exercice - Nombres complexes - 5 points

Soit u le nombre complexe $u = \sqrt{3} + i$.

1. Calculer u^2 , u^3 et $\frac{1}{u}$.
2. Montrer que u est une des solutions de l'équation :

$$z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$$

Quelle est l'autre solution ?

3. Mettre u sous forme trigonométrique. En déduire la valeur de u^6 .

Deuxième Exercice - Fonctions - 5 points

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $D =]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
2. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

3. On pose $g(x) = f(x^2)$. Calculer la dérivée de f puis la dérivée de g .

Troisième Exercice - Intégrales - 4 points

(questions indépendantes)

1. Calculer les intégrales suivantes

$$I = \int_0^3 \frac{x dx}{x^2 + 1}$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x) dx$$

2. Calculer, au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale

$$K = \int_1^e x^3 \ln x dx$$

Quatrième Exercice - Équations différentielles - 6 points

1. Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 2y' - 3y = 0$$

2. On considère maintenant l'équation différentielle :

$$(x + 1)y' + 2y = x + 1 \quad (E)$$

- (a) Résoudre l'équation sans second membre sur $I =] - 1, +\infty[$.
- (b) Trouver une solution particulière de l'équation complète sur I , par la méthode de variation de la constante.
- (c) Trouver toutes les solutions de l'équation (E) .