

Université de Cergy-Pontoise
Décembre 2007
SVT-S1- Maths pour les Sciences
L1 et L2

Durée 2 heures, documents et calculatrice interdits

Premier Exercice - 10 points

Calculs directs :

1. Déterminer

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\ln x} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

2. Trouver tous les complexes qui vérifient

$$z + \frac{1}{z} = 1$$

On calculera le module et un argument de chacune des solutions.

3. En faisant des intégrations par parties, calculer :

$$J = \int_0^1 t^2 \sin 2t dt$$

4. Résoudre l'équation différentielle

$$2y'' - y' - y = x^2$$

On résoudra l'équation sans second membre puis on cherchera une solution particulière qui soit un polynôme.

Second Exercice - 6 points

1. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x(x^2 + 1)} \quad \text{sur} \quad I =]0, +\infty[$$

Montrer qu'il existe des constantes a , b et c telles que, pour tout x de I ,

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

2. En déduire les primitives de f sur I .
3. On considère maintenant l'équation différentielle :

$$xy' - y = \frac{x}{1 + x^2} \quad (E)$$

- (a) Résoudre l'équation sans second membre sur I .

- (b) Trouver une solution particulière de l'équation complète sur I , par la méthode de variation de la constante.
- (c) Trouver toutes les solutions de l'équation (E) .
-

Troisième exercice - 4 points

Soit $I(x)$ la fonction définie pour $x > 0$ par :

$$I(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{t+1} dt$$

Calculer $I(x)$. On pourra introduire une nouvelle variable u telle que $u = \sqrt{x}$. Vérifier le résultat obtenu en calculant la dérivée de $I(x)$.