Université de Cergy-Pontoise
Décembre 2007
ELHM
L1 et L2
Durée 2 heures, documents interdits

Premier Exercice - 9 points

On rappelle que le cinquième postulat d'Euclide peut s'énoncer ainsi :
« Par un point A extérieur à une droite D, on peut mener exactement une droite parallèle à une droite donnée D. »

Les géométries non-euclidiennes conduisent à prendre la négation de ce postulat de deux façons différentes :

« Par un point A extérieur à une droite D, on ne peut mener aucune droite parallèle à une droite donnée D. »

ou bien

« Par un point A extérieur à une droite D, on peut mener une infinité de droites parallèles à une droite donnée D. »

Expliquer pourquoi il n'est pas possible, dans le cas où les autres axiomes d'Euclide sont vrais, de supposer :

« Par un point A extérieur à une droite D, on peut mener exactement deux droites parallèles à une droite donnée D. »

On pourra s'aider d'une figure.

Second Exercice - 5 points

On considère AB un segment de longueur 1. La transformation $\mathscr{F}$ consiste à remplacer le segment $[AB]$ par la ligne brisée $ACDEB$ où $AC = CD = DE = EB = \frac{1}{3}AB$, comme sur le dessin. On note F_0 le segment $[AB]$. Soit F_n la ligne brisée obtenue à partir de F_{n-1} en effectuant la transformation F sur tout les segments de F_{n-1}.

1. Dessiner le début de la ligne F_3.
2. Calculer la longueur L_n de la ligne brisée F_n. Déterminer sa limite lorsque n tends vers l'infini.
3. Calculer l'aire de la région limitée par la courbe F_n et le segment $[AB]$. Quelle est sa limite lorsque n tend vers $+\infty$?

Quatrième exercice - 6 points

On note $(p_n)_{n\geq 1}$ la suite ordonnée des nombres premiers, avec donc $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ ...

1. Soit $n \geq 2$. On note N le nombre

$$N = p_1 p_2 \dots p_n - 1$$

Montrer qu'un facteur premier p de N est nécessairement supérieur ou égal à p_{n+1}.

2. En déduire
$$p_{n+1} < p_1 p_2 \dots p_n$$
3. En déduire, par récurrence, que si $n \geq 0$:
$$p_n \leq 2^{2^n}$$
4. (*) Montrer que, pour n plus grand que trois, on a :
$$p_{n+1} + p_{n+2} \leq p_1 p_2 \dots p_n$$