

# Université de Cergy-Pontoise

Juin 2007

ELHM

L1 et L2

Durée 1 heure 30, documents interdits

---

## Premier Exercice - 7 points

On appelle nombre pyramidal un nombre qui est figuré par une pyramide de "boules de billard" (ou de "boulets de canon" à base carrée). Ainsi, le premier nombre pyramidal  $P_1$  est 1, le second est  $P_2 = 5$  car on construit un carré de côté deux avec quatre boules et qu'on ajoute une boule au-dessus.

1. Justifier que  $P_3 = 14$ , calculer  $P_4$  et  $P_5$ .
2. Démontrer la formule :

$$P_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. On s'intéresse aux nombres pyramidaux qui sont aussi des carrés. Montrer que c'est le cas de 4900, c'est-à-dire qu'il existe  $n$  tel que :  $P_n = 4900$ . On utilisera une décomposition en facteurs premiers et on précisera la valeur de  $n$ .
- 

## Second Exercice - 7 points

Dans un manuscrit ancien, on a retrouvé une multiplication partiellement effacée :

$$25 \times \bullet 4 = 8 \bullet 9$$

où  $\bullet$  représente un chiffre effacé.

1. En utilisant les derniers chiffres, montrer que la seule base possible pour que cette multiplication soit juste est la base  $b = 11$ .
  2. Déterminer les chiffres manquant et traduire la multiplication en base 10.
- 

## Troisième exercice - 6 points

Un exercice de compréhension. On trouve dans Euler (Introduction à l'analyse infinitésimale), le texte suivant :

*« Si  $y$  est une fonction impaire de  $z$ , réciproquement  $z$  sera une fonction impaire de  $y$ . »  
En effet, puisque  $y$  est une fonction impaire de  $z$ , si l'on écrit  $-z$  à la place de  $z$ ,  $y$  se changera en  $-y$ . Donc, si la valeur de  $z$  est donnée en  $y$ , il faut nécessairement qu'en mettant  $-y$  au lieu de  $y$ ,  $z$  devienne aussi  $-z$ , et par conséquent  $z$  sera une fonction impaire de  $y$ ; par exemple, si  $y = z^3$ ,  $y$  est une fonction impaire de  $z$ , et de l'équation  $z^3 = y$  ou  $z = y^{\frac{1}{3}}$ , on conclura de même que  $z$  est une fonction impaire de  $y$ .*

1. Traduire dans le langage mathématique actuel l'énoncé de la proposition faite dans ce paragraphe. On adaptera les notations et on apportera les précisions nécessaires.
2. Que penser de la démonstration qui suit l'énoncé ?
3. Proposer une démonstration, en employant les mathématiques actuelles.