CY Cergy Paris Université
Date: Janvier 2025

Examen Mathématiques 1 - PCSTI
(Session 1)
Durée: 3 heures

Exercice 1.
(a) soient a et b deux nombres réels positifs, montrer que pour tout n entier naturel,

$$(a+b)^n \geq a^n + b^n.$$

(b) Calculer les limites suivantes: $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2+x-6}{x^2+3x+1}$; $\lim_{x \to -\infty} \frac{cos(6x)}{x^2}$.
(c) Calculer les dérivées des fonctions suivantes: $f(x) = ln(x^3 - 4x + 6)$; $g(x) = \frac{cos(x^4)}{1+x^2}$.
(d) Montrer que l'équation $x^3 - 6x + 1 = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[0;1]$.
(e) Déterminer le DL d'ordre 3 en 0 de la fonction f définie par $f(x) = e^{2x}$.

Exercice 2.
(1) Déterminer une équation cartésienne du Plan (P) passant par les trois points suivants: $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(0;0;1)$.
(2) Soit D la droite passant par le point $E(3;3;3)$ et perpendiculaire au plan P. Déterminer une équation paramétrique de la droite D.
(3) Calculer les coordonnées du point d'intersection (noté F) de la droite D et du plan P.
(4) Calculer la distance EF.
(5) (Bonus) soit G un point quelconque dans P, justifier que $EG \geq EF$.

Exercice 3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x}$.
(1) Calculer les limites $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
(2) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
(3) Déterminer la fonction réciproque de f, notée f^{-1}. (Indication: cela revient à résoudre l'équation $\frac{e^x}{1+2e^x} = y$.)
(4)Quel est le domaine de définition de f^{-1} ?
(5) Justifier que f^{-1} est une fonction strictement croissante.

Exercice 4.
Soient n un entier naturel strictement positif et a et b deux nombres réels strictement positifs tels que $a < b$. Montrer, à l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $f(x) = x^{n+1}$ définie sur l'intervalle

$[a; b]$, l'encadrement suivant:

$$(n+1)a^n < \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n.$$