CY Cergy Paris université
Date: janvier 2024

Examen Maths1-PCST
Durée: 3h

Exercice 1.
(a) Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

$$f(x) = x\ln x; \quad g(x) = \sin(x^2 + 4x).$$

(b) Calculer les limites suivantes:
(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+5}{4x^2-x+9}$. (ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2}$.
(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{4x^2}$.

(c) Calculer les intégrales suivantes:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + 3\cos x)dx$; $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$.

Exercice 2.
Etudier la position relative des deux plans suivants, on donnera l'équation de leur droite d'intersection si elle existe:

$$P_1: \quad 3x - y + z = 1;$$

$$P_2: \quad x + 2y - z = 0.$$

Exercice 3.
Soit f une fonction continue définie sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$ et f' est croissante.
(i) Rappeler l'énoncé du théorème des accroissements finis.
(ii) Montrer que pour tout $x > 0$,

$$f(x) \leq xf'(x).$$

(iii) Soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, justifier que g est dérivable sur $]0, +\infty[$. Puis démontrer qu'elle est croissante sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}\sin(x-1) + \frac{1}{4}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
(i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mid f'(x) \mid\leq \frac{19}{20}$.
(ii) Calculer $f(1)$, puis à l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_{n+1} - 1 \mid\leq \frac{19}{20} \mid u_n - 1 \mid .$$

(iii) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_n - 1 \mid\leq (\frac{19}{20})^n \mid u_0 - 1 \mid .$$

En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.