CY Cergy Paris université
Date: janvier 2023

Examen Maths1 PCST, session 1
Durée: 3h

Exercice 1.
(a) Calculer la dérivée des fonctions suivantes:

$$f(x) = x^3 \cos x; \quad g(x) = \frac{\ln(x)}{x}; \quad h(x) = e^{x^3-5x}.$$

(b) Calculer les intégrales suivantes:

$$\int_0^2 (x^2 - 6x)dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^3 \sin x dx.$$

(c) Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

(d) Pour tout $x \in [-1, 1]$, montrer que $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 2.
Etudier la position relative des deux plans suivants, on donnera l'équation de leur droite d'intersection si elle existe:

$$P_1 : \quad x + y + 2z = 3;$$
$$P_2 : \quad 2x - y + z = 2.$$

Exercice 3.
Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui vérifie $f([0, 2]) \subset [0, 2]$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 2]$ tel que $f(c) = c$.

Exercice 4.
(1) Montrer que l'équation $\cos x - x = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[0; 1]$, notée l.
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \cos u_n$.

(2) Calculer les termes u_1, u_2 et u_3.
(3) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq 1.$$

(4) Rappeller l'énoncé du théorème des accroissements finis.
(5) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $\cos x$ sur l'intervalle $[l, u_n]$, montrer qu'il existe $c \in]l, u_n[$ tel que

$$u_{n+1} - l = -\sin(c)(u_n - l).$$

(Indication: $u_{n+1} = \cos(u_n)$, $l = \cos(l)$.)
(6) Justifier que $0 < \sin c < \sin(1)$
(Indication: l et u_n appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$, donc $c \in]0; 1[$.)
(7) En déduire que

$$\mid u_{n+1} - l \mid \leq \sin(1) \mid u_n - l \mid .$$

(8) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_n - l \mid \leq (\sin(1))^n \mid u_0 - l \mid .$$

En déduire que $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.