CY Cergy Paris université
Date: janvier 2022

Examen Maths1-PCST
Durée: 3h

Exercice 1.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n \geq 1 + n$.
(b) Calculer les limites suivantes:
(i) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-2x^2+8}{3x^4-x^2+9x}$ (ii) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x+2} - x$
(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-\sin x}{\cos x - 1}$
(c) Calculer les intégrales suivantes:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$; $\int_1^2 \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$.
(d) Montrer que pour tout $x \in [-1; 1]$,

$$\arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 2.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}$.
(a) Etudier les variations de $f(x)$, en déduire que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $f(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer $f(\mathbb{R})$, puis Calculer la fonction réciproque f^{-1}.

Exercice 3.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(x-1) + \frac{1}{2}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
(i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mid f'(x) \mid \leq \frac{3}{4}$.
(ii) Calculer $f(1)$, puis à l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_{n+1} - 1 \mid \leq \frac{3}{4} \mid u_n - 1 \mid .$$

(iii) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_n - 1 \mid \leq (\frac{3}{4})^n \mid u_0 - 1 \mid .$$

En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 4.
Soient P_1 le plan d'équation $x+y-z=2$, et P_2 le plan d'équation $2x-y+4z=1$.
(a) Justifier que P_1 et P_2 sont sécants.
(b) Soit D la droite d'intersection des deux plans, déterminer un vecteur directeur de D.
(c) Justifier que le point $(1;1;0)$ appartient à la droite D, en déduire une équation paramétrique de D.