CY Cergy Paris université
Date: janvier 2021

Examen maths1-PCST
Durée: 3h, les calculatrices ne sont pas autorisées.

Exercice 1.
(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(b) Calculer les limites suivantes:
(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-2x^2+7}{2x^3-x^2+7x}$. (ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$.
(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2}$.

(c) Calculer les intégrales suivantes:
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \cos^2 x dx$; $\int_0^1 xe^x dx$.

Exercice 2.
Soit f une fonction continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$, telle que $f(0) = 0$ et f' est croissante.
(1) à l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x > 0$,

$$f(x) \le xf'(x).$$

(2) soit $g :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, justifier que g est dérivable sur $]0, +\infty[$, puis montrer qu'elle est croissante sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = cos(x) - x.$$

(i) Etudier la variation de f, puis en déduire qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $cos(a) = a$.
(ii) Justifier que $a \in [0; 1]$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = cos(u_n)$
(iii) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 1$.

(iv) à l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $\cos x$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$| u_{n+1} - a | \leq (sin(1)) \mid u_n - a \mid .$$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$| u_n - a | \leq (sin(1))^n \mid u_0 - a \mid .$$

(v) Est ce que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? Si oui, quelle est sa limite?

Exercice 4.

On considère l'équation différentielle

$$y'(t) = y(t) + 2t - 1,$$

où $y(t)$ est une fonction dérivable de variable t.

(i) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle sans second membre :

$$y'(t) = y(t).$$

(ii) Déterminer la solution générale de l'équation initiale. En déduire la solution de l'équation initiale vérifiant la condition $y(0) = 1$.