

Université de Cergy-Pontoise  
Date: janvier 2020

### Examen L1-MS1-PCST

**Durée: 3h** , les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

#### Exercice 1.

(a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

(b) Calculer les limites suivantes:

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2+3x}{2x^2-3x}$       (ii)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$   
 (iii)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)-2 \sin x}{x}$

(c) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction

$$f(x) = e^{x^2+x}.$$

(d) Calculer les intégrales suivantes:

(i)  $\int_1^2 \frac{e^x}{1-e^x} dx$       (ii)  $\int_0^\pi x \cos x dx.$

#### Exercice 2.

On considère la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = 6xe^{x^2} - 4x^3 + 2x - \sin x.$$

- (i) Justifier rapidement que  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- (ii) Calculer  $f'(x)$  et vérifier que  $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .
- (iii) Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .
- (iv) Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de la fonction  $f(x)$ .
- (v) Soit  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$ , calculer le développement limité en 0 à l'ordre 1 de la fonction  $f^{-1}$ .

#### Exercice 3.

On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = 1 - \sin x ; \quad g(x) = f(x) - x.$$

- (i) Etudier la variation de la fonction  $g(x)$ , puis en déduire qu'il existe un unique  $l \in \mathbb{R}$  tel que  $1 - \sin l = l$ .

- (ii) Justifier que  $l \in [\frac{\pi}{40}; 1]$ .  
 (Indications:  $\sin \frac{\pi}{40} < 0,5$ ;  $\pi < 4$ .)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

- (iii) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{\pi}{40} \leq u_n \leq 1$ .  
 (Indication:  $\sin 1 < 0,9$ .)  
 (iv) A l'aide du théorème des accroissements finis appliqué à la fonction  $f(x)$ , démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_{n+1} - l| \leq \cos \frac{\pi}{40} \cdot |u_n - l|.$$

- (v) Démontrer par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$|u_n - l| \leq (\cos \frac{\pi}{40})^n \cdot |u_0 - l|.$$

- (vi) Est ce que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge? Si oui, quelle est sa limite?

#### Exercice 4.

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni d'un repère orthonormé, soient  $A_{(1;0;0)}$  et  $B_{(0;0;2)}$ . Soient  $P_1$  le plan d'équation  $x - y + z = 2$  et  $P_2$  le plan d'équation  $x + y - z = 3$ .

- (i) Justifier que  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants.  
 (ii) Soit  $D$  la droite passant par les points  $A$  et  $B$ , déterminer une équation paramétrique de  $D$ .  
 (iii) Justifier que  $D$  et  $P_1$  sont sécants et que  $D$  et  $P_2$  sont également sécants.  
 (iv) Soit  $C_1$  le point d'intersection de  $D$  et  $P_1$ , soit  $C_2$  le point d'intersection de  $D$  et  $P_2$ . Calculer les coordonnées de  $C_1$  et  $C_2$ .  
 (v) Soit  $d(C_1, P_2)$  la distance entre le point  $C_1$  et le plan  $P_2$ , calculer la valeur de  $d(C_1, P_2)$ . Calculer également la valeur de  $d(C_2, P_1)$ .  
 (vi) Soit  $t \in \mathbb{R}$  et  $M(t)$  le point appartenant à la droite  $D$  et de paramètre  $t$ , déterminer l'expression de la fonction suivante:

$$f(t) = [d(M(t), P_1)]^2 + [d(M(t), P_2)]^2.$$

- (vii) Etudier la variation de la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . En déduire le minimum de  $f$ .