Université de Cergy-Pontoise
Date: Juin 2018

Examen L1-MS1-PCST

Durée: 2h , les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1.
(a) Calculer les limites suivantes:
(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+5}{4x^2+x+7x+1}$. (ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(lnx)}{e^x}$.
(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)-x+\frac{x^3}{6}}{x^5}$.

(b) Linéariser la fonction $(cos(x))^2$. Puis en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} (cos(x))^2 dx.$$

(c) Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 sin(x)dx$.

Exercice 2.
On considère la fonction $f :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = ln(e^x - 1).$$

(i) Justifier brièvement que f est continue et dérivable.
(ii) Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de $f(x)$.
(iii) Montrer que f est une bijection de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.
(iv) On considère l'équation $(ln(e^x - 1))^2 - 9 = 0$, combien de solutions y-a-t-il? Justifier.

Exercice 3.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}sin(x) - x.$$

(i) Etudier la variation de la fonction f. Puis en déduire qu'il existe un unique $l \in \mathbb{R}$ tel que $1 - \frac{1}{2}sin(l) = l$.
(ii) Justifier que $l \in [0; 1]$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}sin(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(iii) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
(iv) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_{n+1} - l \mid \leq \frac{1}{2} \mid u_n - l \mid .$$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_n - l \mid \leq (\frac{1}{2})^n \mid u_0 - l \mid .$$

(v) Est ce que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge? Si oui, quelle est sa limite?

Exercice 4.
On considère l'équation différentielle

$$y'(t) - y(t) = t,$$

où $y(t)$ est une fonction dérivable de la variable t.
(i) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle homogène

$$y'(t) - y(t) = 0.$$

(ii) Déterminer une solution particulière de l'équation initiale.
(iii) En déduire la solution générale de l'équation initiale.

Exercice 5.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^4 = 1 + i$.