Université de Cergy-Pontoise
Date: janvier 2018

Examen L1-S1-PCST

Durée: 3h , les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(b) Calculer les limites suivantes:

(i) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3-2x^2+7}{4x^3+-3x^2+7x-2}$. (ii) $\lim_{x \to +\infty} \frac{(lnx)^2}{x}$.

(iii) $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - sin(x) - 1}{x^2}$.

(c) Linéariser la fonction $(sin(x))^3$. Puis en déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin(x))^3 dx.$$

(d) Calculer les deux intégrales suivantes:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin(x)}{2+cos(x)} dx$;

$\int_1^2 x^2 ln(x) dx$.

Exercice 2.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 4xe^{x^2} - 2sin(x) + 2cos(x) - 2.$$

(i) Justifier brièvement que f est continue et dérivable.

(ii) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(iii) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(iv) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f, calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 3.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = cos(x) - x.$$

(i) Etudier la variation de la fonction f. Puis en déduire qu'il existe un

unique $l \in \mathbb{R}$ tel que $cos(l) = l$.
(ii) Justifier que $l \in [0; 1]$.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = cos(u_n)$
(iii) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$.
(iv) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_{n+1} - 1 \mid \leq (sin(1)) \mid u_n - 1 \mid .$$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_n - 1 \mid \leq (sin(1))^n \mid u_0 - 1 \mid .$$

(v) Est ce que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge? Si oui, quelle est sa limite?

Exercice 4.
On considère l'équation différentielle

$$y'(t) + y(t) = t^2 + t - 2,$$

où $y(t)$ est une fonction dérivable de la variable t.
(i) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle homogène

$$y'(t) + y(t) = 0.$$

(ii) Déterminer une solution particulière de l'équation initiale sous la forme

$$y(t) = t^2 + bt + c,$$

où b et c sont deux nombres réels à déterminer.
(iii) Déterminer la solution générale de l'équation initiale. En déduire la solution de l'équation vérifiant la condition $y(0) = 2$.

Exercice 5.
Soit $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$ une constante
(i) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2cos\theta z + 1 = 0.$$

(ii) En déduire les solutions de l'équation

$$z^6 - 2cos\theta z^3 + 1 = 0.$$