Université de Cergy-Pontoise
Date: janvier 2017

Examen L1-S1-PCST

Durée: 3h , les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés

Exercice 1.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

(b) Calculer les limites suivantes:
(i) $\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^4-2x^3+1}{4x^4+x^2+10x}$. (ii) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x}$.
(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{3sin(x)-xcos(x)-2x}{x^5}$.

(c) Exprimer $cos(3\theta)$ en fonction de $cos(\theta)$ et $sin(\theta)$.

Exercice 2.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 3xe^{x^2} - 2x^3.$$

(i) Justifier rapidement que f est continue et dérivable.
(ii) Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
(iii) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
(iv) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f, calculer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

Exercice 3.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}sin(x-1) + \frac{1}{2}.$$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
(i) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mid f'(x) \mid\leq \frac{5}{6}$.
(ii) Calculer $f(1)$, puis à l'aide du théorème des acroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_{n+1} - 1 \mid\leq \frac{5}{6} \mid u_n - 1 \mid .$$

(iii) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mid u_n - 1 \mid\leq (\frac{5}{6})^n \mid u_0 - 1 \mid .$$

En déduire que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 4.

Soit $y(x)$ une fonction dérivable.
(i) Pour tout $C \in \mathbb{R}$, vérifier que $y(x) = Ce^{-2x}$ est solution de l'équation différentielle $y' + 2y = 0$.
(ii) A l'aide de la méthode de variation de la constante, déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle

$$y' + 2y = 3x.$$

Exercice 5.

(i) Déterminer toutes les solutions dans $\mathbb{C}$, sous forme exponentielle, de l'équation:

$$z^5 - 1 = 0.$$

Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
(ii) A l'aide de l'identité $z^5 - 1 = (z-1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$, montrer que

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0.$$

(iii) Vérifier que

$$\omega + \omega^4 = 2cos(\frac{2\pi}{5}) \text{ et } \omega^2 + \omega^3 = 2cos(\frac{4\pi}{5}).$$

En déduire que $1 + 2cos(\frac{2\pi}{5}) + 2cos(\frac{4\pi}{5}) = 0$.
(iv) En déduire, à l'aide de la formule $cos(2\theta) = 2cos^2(\theta) - 1$, que $cos(\frac{2\pi}{5})$ est solution de l'équation

$$4x^2 + 2x - 1 = 0.$$

Puis calculer la valeur exacte de $cos(\frac{2\pi}{5})$.