
Examen du 14 janvier 2015

**Durée 3h. Aucun document ni calculatrice autorisé.
Téléphones portables interdits.**

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ à valeurs dans l'ensemble $\{4, 5\}$ donnée par les relations $f(1) = 4, f(2) = 5, f(3) = 4$. f est-elle injective, surjective, bijective? Justifier.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition mathématique de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Exercice 3.

(a) Rappeler (sans justification) les valeurs des limites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$.

(b) Montrer l'existence de la limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(2x)}$ et trouver sa valeur.

Exercice 4.

(a) Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires.

(b) Soit f une fonction continue sur $[1, 2]$ telle que $f(1)$ et $f(2)$ appartiennent à $[1, 2]$. Montrer qu'il existe un point $c \in [1, 2]$ tel que $f(c) = c$. (On pourra appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à la fonction $g(x) = f(x) - x$.)

Exercice 5. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f(x) = e^x + \sin(x), \quad g(x) = \sin(x^2), \quad h(x) = \frac{1}{1 + \tan(x)}, \quad k(x) = e^{e^x}.$$

Exercice 6. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Calculer la dérivée de f en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

Exercice 7.

(a) Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Rappeler la définition d'une primitive F de f et donner la valeur de l'intégrale $\int_a^b f$ en termes de F .

(b) Soient f, g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$. Rappeler la formule d'intégration par parties pour le calcul de $\int_a^b f g'$.

(c) Trouver la valeur de l'intégrale $\int_0^1 x^2 \sin(x) dx$.

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions dérivables sur \mathbb{R} qui vérifient la relation $f'(x) + f(x) = 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Poser $f(x) = e^{-x} g(x)$.)

Barème indicatif : Exo 1 = 1, Exo 2 = 2, Exo 3 = 4, Exo 4 = 4, Exo 5 = 5, Exo 6 = 4, Exo 7=5, Exo 8=4