UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

CONTRÔLE DU 14/12/12 (durée 1h)

Il faut soigner la rédaction et la présentation : souligner vos résultats. Documents et calculatrices interdits.

Barème :10 - 10

EXERCICE 1

On se propose de résoudre l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x + \cos(2x) \qquad \text{(E)}$$

1) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle : $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

2) a) Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle : $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^x$

b) Rechercher une solution particulière du type $y = Acos(2x) + Bsin(2x)$, A et B étant deux constantes réelles, de l'équation différentielle : $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = \cos(2x)$

3) a) Déterminer la solution générale de (E).

b) Déterminer la solution de (E) vérifiant : $y(0) = y'(0) = 0$.

c) Avec les conditions initiales du b), en déduire l'allure du tracé au voisinage de 0 de la courbe représentative (C) de la solution de (E).

EXERCICE 2

1) Donner des développements limités d'ordre 2 au voisinage de 0 de $expy$, $\ln(1+y)$, $siny$.

2) a) Déterminer un développement limité d'ordre 2 en 0 de $e^{(x^2+2x)}$.

b) En déduire un développement limité d'ordre 2 en 0 de $e^{(x+1)^2}$.

c) En utilisant la question précédente, donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentative (C) de la fonction f définie par $f(x) = e^{(x+1)^2}$.On précisera les positions relatives.

3) a) Justifier que : $\forall\ x \in]-e, +\infty[$, $\ln(e+x) = 1 + \ln(1+\frac{x}{e})$

b) En déduire un développement limité d'ordre 2 en 0 de $\ln(e+x)$.

c) Déterminer les limites suivantes,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{(x^2+2x)} - \ln(e+x)}{\sin(2x)} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\ [\ln(e+x)]^{\frac{1}{x}}$$