UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

CONTRÔLE DE MATHEMATIQUES DU 12/10/12 (Durée 1h)

Il faut soigner la rédaction et la présentation : souligner les résultats. Tous les documents et calculatrices sont interdits. Barème prévisionnel : 4 – 4 – 6 - 6

EXERCICE 1

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

1) a) Calculer la dérivée $f^{'}$ de f.

b) En déduire le sens de variation de f. Justifier que f est une application bijective sur $\mathbb{R}$.

2) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 0$.

EXERCICE 2

La fonction tangente hyperbolique est définie sur $\mathbb{R}$ par : $thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

1) Justifier que la fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ th^{'}(x) = 1 - (thx)^2$$

2) En utilisant le résultat précédent, calculer la dérivée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = thx - \frac{1}{3}\,(thx)^3$$

EXERCICE 3

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner l'expression de la dérivée n-ième de la fonction $f: x \mapsto (1+x)^n$

2) En utilisant la formule de Leibniz, calculer la dérivée n-ième de la fonction $g: x \mapsto x^2(1+x)^n$

EXERCICE 4

1) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} - \{1;2\}$, $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$

b) En déduire la valeur de l'intégrale : $I = \int_3^4 \frac{1}{x^2-3x+2}\,dx$

2) En intégrant par parties, calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^{\pi/2} (4x+1)\cos(2x)\,dx$$

____