UCP / PCST S1 **EXAMEN DE MATHEMATIQUES (durée 3h)**

Les documents et calculatrices sont interdits. La rédaction et la présentation doivent être soignées.

Les résultats sont à souligner. Barème prévisionnel : 4 – 3 – 4 – 2 – 4 – 3

EXERCICE 1 *Les 3 questions sont totalement indépendantes*

1) a) Décomposer en éléments simples la fonction rationnelle f définie par : $f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-4)}$

b) En déduire le calcul de l'intégrale $I = \int_2^3 f(x)dx$

2) Soit l'intégrale $J = \int_0^{\pi/2} \frac{cosx}{3+sin^2x}\, dx$

Calculer J au moyen du changement de variable $t = sinx$.

3) Au moyen d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $K = \int_0^1 e^x \ln(1 + e^{-x})\, dx$

EXERCICE 2

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, soit l'équation différentielle du premier ordre : $xy' + (1-x)y = \frac{xe^x}{x^2+1}$ (E)

1) Déterminer la solution générale de l'équation sans second membre : $xy' + (1-x)y = 0$

2) On se propose de rechercher une solution particulière de (E) sous la forme : $y = z(x)\frac{e^x}{x}$ avec z une fonction de classe C^1.

a) Montrer que z vérifie l'égalité $z'(x) = \frac{x}{x^2+1}$

b) En déduire une solution particulière de (E).

3) Déterminer la solution générale de (E).

EXERCICE 3

On observe l'évolution, par rapport au temps t, de la densité N d'un système complexe de molécules donnée par l'équation différentielle du second ordre : $\frac{d^2N}{dt^2} - 2\frac{dN}{dt} + N = \frac{2e^t}{(1+t)^3}$ (E)

1) Vérifier que la fonction définie par $N_p(t) = \frac{e^t}{1+t}$ est solution de (E).

2) En déduire la solution générale de (E).

3) Déterminer la solution de (E) , que l'on désignera par $N(t)$, vérifiant : $N(0) = 1$ et $\frac{dN}{dt}(0) = 0$.

../..

EXERCICE 4

Calculer les limites en 0, en les justifiant, des fonctions suivantes :

$$g: x \mapsto \frac{(1-e^{x})sinx}{3x^2+x^3} \qquad h: x \mapsto \frac{e^{x}-cosx-x}{\ln(1+sinx)-x}$$

EXERCICE 5

1) a) Rappeler la formule de Taylor-Young donnant le développement limité d'ordre 3 en 0 d'une fonction f de classe C^3.

b) Rappeler la valeur de l'intégrale $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$.

2) En utilisant les résultats de la question 1) , donner un développement limité d'ordre 2 en 0 de la fonction $f: t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ puis en déduire un développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction arctan.

3)a) Montrer que le développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $g: x \mapsto e^{arctanx}$ est donné par :

$$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

b) En déduire l'équation de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 0 , puis la position de la courbe par rapport à cette tangente.

4) On admet, dans cette question, que : $\forall x > 0$, $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

a) Donner un développement limité d'ordre 3 en $+\infty$ de la fonction g définie au 3).

b) En déduire l'asymptote à la courbe g en $+\infty$ et la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

EXERCICE 6

1) Rechercher dans $\mathbb{C}$ les racines carrées du nombre complexe $-8i$.

2) Soit à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-5i)z + 16(1-i) = 0 \quad \text{(E)}$$

a) Montrer que l'équation (E) peut s'écrire sous la forme $(z-2)P(z) = 0$ avec, $P(z)$ un polynôme que l'on précisera.

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).
