CORRIGE de l'ET de MATHEMATIQUES DE PCST L1 S1 (janvier 2013)

EXERCICE 1

1) a) $f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)(x-4)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}+\dfrac{c}{x-4}$

• en multipliant chaque membre par x on obtient $\dfrac{1}{(x-1)(x-4)}=a+\dfrac{bx}{x-1}+\dfrac{cx}{x-4}$

Ceci devant être vrai pour tout x, si $x = 0$ on obtient $a=\dfrac{1}{4}$

• en multipliant par $(x-1)$ on obtient $\dfrac{1}{x(x-4)}=\dfrac{a(x-1)}{x}+b+\dfrac{c(x-1)}{x-4}$

si $x=1$ on obtient $b=-\dfrac{1}{3}$

• en multipliant par $(x-4)$ on obtient $\dfrac{1}{x(x-1)}=\dfrac{a(x-4)}{x}+\dfrac{b(x-4)}{x-1}+c$

si $x=4$ on obtient $c=\dfrac{1}{12}$

On a donc $\boxed{f(x)=\dfrac{\frac{1}{4}}{x}+\dfrac{-\frac{1}{3}}{x-1}+\dfrac{\frac{1}{12}}{x-4}}$

b)

$$I=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3\left(\frac{\frac{1}{4}}{x}+\frac{-\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{\frac{1}{12}}{x-4}\right)dx=\frac{1}{4}\int_2^3\frac{dx}{x}-\frac{1}{3}\int_2^3\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{12}\int_2^3\frac{dx}{x-4}=\frac{1}{4}\big[\ln|x|\big]_2^3-\frac{1}{3}\big[\ln|x-1|\big]_2^3+\frac{1}{12}\big[\ln|x-4|\big]_2^3$$

$$I=\frac{1}{4}(\ln 3-\ln 2)-\frac{1}{3}(\ln 2-\ln 1)+\frac{1}{12}(\ln 1-\ln 2)=\frac{1}{4}\ln 3+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)\ln 2=\frac{1}{4}\ln 3-\frac{8}{12}\ln 2$$

Donc $\boxed{I=\dfrac{1}{4}\ln 3-\dfrac{2}{3}\ln 2}$

2) $J=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x}{3+\sin^2 x}dx$ Posons $t=\sin x$ $dt=\cos dx$. Si $x=0$ alors $t=0$. Si $x=\dfrac{\pi}{2}$ alors $t=1$.

Donc $J=\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{3+t^2}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}$ Posons $u=\dfrac{t}{\sqrt{3}}$ alors $du=\dfrac{dt}{\sqrt{3}}$.

Pour $t=0$ alors $u=0$ et pour $t=1$ alors $u=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

D'où $J=\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}\,du}{1+u^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\big[\arctan u\big]_0^{1/\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\arctan 0\right)$

$\arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=y\Leftrightarrow\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\tan y\Leftrightarrow y=\dfrac{\pi}{6}$ et $\arctan 0=y\Leftrightarrow\tan y=0\Leftrightarrow y=0$

On a donc $J=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\times\dfrac{\pi}{6}$ soit $\boxed{J=\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}}$

3) $K=\int_0^1 e^x\ln(1+e^{-x})dx$ Posons $u=\ln(1+e^{-x})$ d'où $du=\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx$

et $dv=e^x$ d'où $v=e^x$

$$K=\left[e^x\ln(1+e^{-x})\right]_0^1-\int_0^1 e^x\,\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left(e\ln(1+e^{-1})-1\ln(1+1)\right)+\int_0^1\frac{1}{1+e^{-x}}dx=e\ln\left(1+\frac{1}{e}\right)-\ln 2+\int_0^1\frac{1}{1+\frac{1}{e^x}}dx$$

$$K=e\ln\frac{e+1}{e}-\ln 2+\int_0^1\frac{e^x}{e^x+1}dx=e\left(\ln(e+1)-1\right)-\ln 2+\left[\ln\left|e^x+1\right|\right]_0^1=e\left(\ln(e+1)-1\right)-\ln 2+\ln(e+1)-\ln 2$$

$$\boxed{K=(e+1)\ln(e+1)-e-2\ln 2}$$

EXERCICE 2

1) $xy'+(1-x)y=0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{y'}{y}=\dfrac{x-1}{x} \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{y'}{y}=1-\dfrac{1}{x} \quad\Leftrightarrow\quad \ln|y|=x-\ln|x| \quad\Leftrightarrow\quad y=K\,e^{x-\ln|x|} \quad\Leftrightarrow\quad y=K\,\dfrac{e^x}{x}$

La solution générale de l'équation sans second membre est $\boxed{y_H=K\,\dfrac{e^x}{x}}$

2) a) Si y est une solution particulière de (E) alors y vérifie l'équation (E).

$$y'=z'(x)\frac{e^x}{x}+z(x)\frac{e^x x-e^x}{x^2}=z'(x)\frac{e^x}{x}+z(x)\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

L'équation (E) s'écrit alors $x\left(z'(x)\dfrac{e^x}{x}+z(x)\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}\right)+(1-x)z(x)\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{xe^x}{x^2+1}$

soit $\dfrac{e^x}{x}\left(x\,z'(x)+(x-1+1-x)\,z(x)\right)=\dfrac{xe^x}{x^2+1} \quad\Leftrightarrow\quad x\,z'(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1} \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{z'(x)=\dfrac{x}{x^2+1}}$

b) On déduit du **a)** que $z(x)=\displaystyle\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)$

Une solution particulière de (E) est $\boxed{y_P=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\dfrac{e^x}{x}}$

3) La solution générale de (E) est $y=y_H+y_P$ soit $\boxed{y=K\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)\dfrac{e^x}{x}}$

EXERCICE 3

1) $N_p(t)=\dfrac{e^t}{1+t}$ donc $\dfrac{dN_p}{dt}=\dfrac{e^t(1+t)-e^t}{(1+t)^2}=\dfrac{te^t}{(1+t)^2}$

et $\dfrac{d^2N}{dt^2}=\dfrac{(e^t+te^t)(1+t)^2-2(1+t)te^t}{(1+t)^4}=\dfrac{e^t(1+t)\left((1+t)^2-2t\right)}{(1+t)^4}=\dfrac{e^t(1+t^2)}{(1+t)^3}$

$$\frac{d^2N}{dt^2}-2\frac{dN}{dt}+N=\frac{e^t(1+t^2)}{(1+t)^3}-2\frac{te^t}{(1+t)^2}+\frac{e^t}{1+t}=\frac{e^t\left[(1+t^2)-2t(1+t)+(1+t)^2\right]}{(1+t)^3}=\frac{e^t(1+t^2-2t-2t^2+1+2t+t^2)}{(1+t)^3}$$

d'où $\dfrac{d^2N}{dt^2}-2\dfrac{dN}{dt}+N=\dfrac{e^t(2)}{(1+t)^3}=\dfrac{2e^t}{(1+t)^3}$

L'équation (E) étant vérifiée $\underline{N_p \text{ est une solution de (E).}}$

2) Recherche de la solution de l'équation sans second membre $\frac{d^2N}{dt^2} - 2\frac{dN}{dt} + N = 0$

Pour cela on cherche les solutions de l'équation $r^2 - 2r + 1 = 0$ c'est-à-dire $(r-1)^2 = 0$

d'où $r = 1$ qui est une solution double

<u>La solution de l'équation sans second membre</u> est donc $\boxed{N_H = (C_1 t + C_2)e^t}$

La solution générale est donc $N = N_H + N_p$ soit $\boxed{N = (C_1 t + C_2)e^t + \frac{e^t}{1+t}}$

3) $N(0) = 1 \iff (C_2) \times 1 + 1 = 1 \iff C_2 = 0$

$\frac{dN}{dt}(t) = C_1 e^t + (C_1 t + C_2)e^t + \frac{te^t}{(1+t)^2}$ donc $\frac{dN}{dt}(0) = 0 \iff C_1 + C_2 = 0$ d'où $C_1 = 0$

<u>La solution cherchée est donc</u> $\boxed{N(t) = \frac{e^t}{1+t}}$

<u>EXERCICE 4</u>

- $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{3x^2 + x^3} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-e^x}{x} \times \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{3+x}\right)$

or $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{x} = -1$, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{1}{3+x} = \frac{1}{3}$

donc $\boxed{\lim_{x\to 0} g(x) = -\frac{1}{3}}$

<u>Autre méthode:</u> Au voisinage de 0, $1 - e^x \sim -x$, $\sin x \sim x$ et $3x^2 + x^3 \sim 3x^2$

Donc $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{3x^2} = -\frac{1}{3}$

- $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - x}{\ln(1+\sin x) - x}$. On utilise des développements limités.

Au voisinage de 0 $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

Quand $x \to 0$, $\sin x \to 0$. On a donc : $\ln(1+\sin x) = \ln\left(1 + x + o(x^2)\right) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$

D'où $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} - 1 + \frac{x^2}{2} - x + o(x^2)}{x - \frac{1}{2}x^2 - x + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + o(x^2)}{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + o(x^2)}{-\frac{1}{2} + o(x^2)} = -2$

$\boxed{\lim_{x\to 0} h(x) = -2}$

<u>EXERCICE 5</u>

1) a) $\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f^{(2)}(0)\frac{x^2}{2!} + f^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!} + o(x^3)}$

b) $\boxed{\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \arctan x - \arctan 0 = \arctan x}$

2) • $f(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$; $f'(t) = \frac{-2t}{(1+t^2)^2}$ donc $f'(0) = 0$;

$$f''(t)=\frac{-2(1+t^2)^2-(-2t)\times 2\times 2t(1+t^2)}{(1+t^2)^4}=\frac{-2(1+t^2)+8t^2}{(1+t^2)^3}=\frac{-2+6t^2}{(1+t^2)^3} \quad \text{donc} \quad f''(0)=-2$$

$$f(t)=1+(-2)\frac{t^2}{2}+o(t^2) \quad \text{soit} \quad \boxed{f(t)=1-t^2+o(t^2)}$$

- $\arctan x=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x (1-t^2+o(t^2))dt=\left[t-\frac{1}{3}t^3+o(t^3)\right]_0^x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$

donc $\boxed{\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+o(x^3)}$

3) a) $g(x)=e^{\arctan x}=e^{x-\frac{1}{3}x^3}$ or quand $x\to 0$ alors $x-\frac{1}{3}x^3\to 0$

D'où $g(x)=1+x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)^3+o(x^3)=1+x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$

On en déduit $\boxed{g(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}$

b) • L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y-g(0)=g'(0)(x-0)$

$g(0)=1$, $g'(x)=1+\frac{1}{2}2x-\frac{1}{6}3x^2$ donc $g'(0)=1$

<u>L'équation de la tangente au point d'abscisse 0</u> est donc $\boxed{y=x+1}$

- Pour trouver la position de la courbe de g par rapport à la tangente , il faut étudier le signe $g(x)-(x+1)$

$g(x)-(x+1)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)=\frac{1}{2}x^2\left(1-\frac{1}{3}x\right)+o(x^3)$

Or $\frac{1}{2}x^2>0$ et , au voisinage de 0, $1-\frac{1}{3}x>0$ d'où $g(x)-(x+1)>0$.

Ce qui signifie que <u>la courbe de *g* est au-dessus de la tangente</u>.

4) a) Pour tout $x>0$ on a $\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$ d'où $\arctan x=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}$

$g(x)=e^{\arctan x}=e^{\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{x}}=e^{\frac{\pi}{2}}\times e^{-\arctan\frac{1}{x}}=e^{\frac{\pi}{2}}\times e^{\arctan(-\frac{1}{x})}$

Quand $x\to+\infty$ alors $\frac{1}{x}\to 0$. On a donc :

$$g(x)=e^{\frac{\pi}{2}}\times\left[1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x}\right)^2-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{x}\right)^3\right]+o\left(\frac{1}{x^3}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$\boxed{g(x)=e^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x^3}\right)}$$

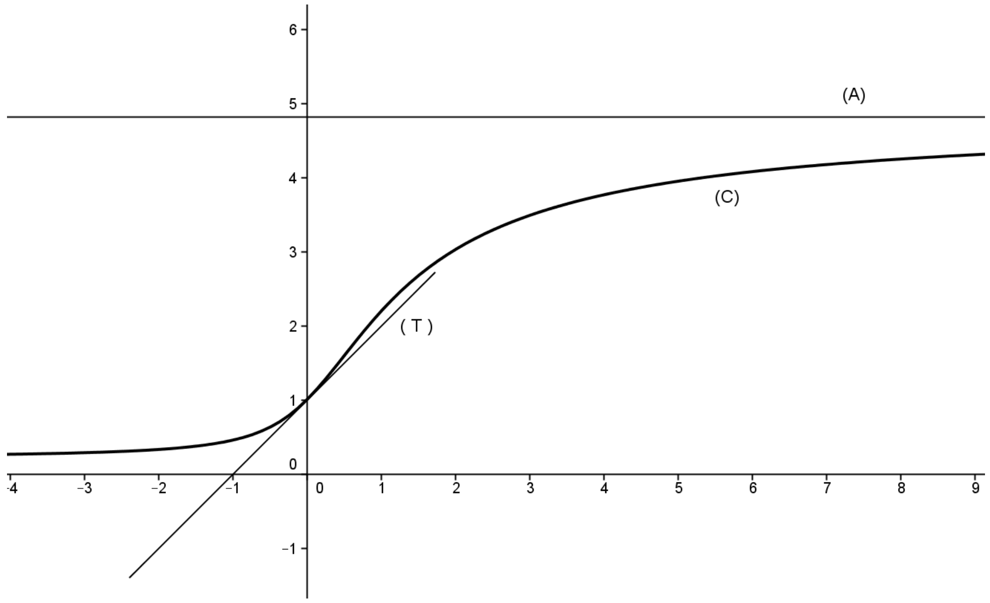
b) • $g(x)-e^{\frac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ donc $\lim_{x\to+\infty}(g(x)-e^{\frac{\pi}{2}})=0$

<u>L'asymptote à la courbe de g en $+\infty$ est la droite d'équation</u> $\boxed{y=e^{\frac{\pi}{2}}}$

- $g(x)-e^{\frac{\pi}{2}}=e^{\frac{\pi}{2}}\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}\right)+o\left(\frac{1}{x^3}\right)=\underbrace{-\frac{1}{x}e^{\frac{\pi}{2}}}_{<0}+\underbrace{e^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}\right)}_{\to 0 \text{ (en } +\infty)}+o\left(\frac{1}{x^3}\right)$

donc $g(x) - e^{\frac{\pi}{2}} < 0$ et <u>la courbe de g est au-dessous de l'asymptote</u>.

Représentation graphique (non demandée)



(C) courbe de g

(T) tangente en 0

(A) asymptote en $+\infty$

<u>EXERCICE 6</u>

1) On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = -8i$

$$(a+ib)^2 = -8i \iff a^2 - b^2 + 2abi = -8i \iff \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 \\ 2ab = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} a = b \\ a^2 = -4 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} a = -b \\ a^2 = 4 \end{cases}$$

$a^2 = -4$ n'a pas de solution il reste donc $a = 2$, $b = -2$ ou $a = -2$, $b = 2$

<u>Les racines carrées de $-8i$ sont</u> $\boxed{z_1 = 2 - 2i \quad \text{et} \quad z_2 = -2 + 2i}$

2) a) Vérifions d'abord que 2 est une solution de (E).

$$2^3 - 2(2+3i)2^2 - 4(1-5i)2 + 16(1-i) = 8 - 16 - 24i - 8 + 40i + 16 - 16i = 8 - 16 - 8 + 16 + i(-24 + 40 - 16) = 0$$

Donc 2 est bien une solution de (E). Par conséquent (E) peut s'écrire : $(z-2)P(z) = 0$ où $P(z)$ est un polynôme du second degré.

(E) s'écrit donc $(z-2)(az^2 + bz + c) = 0 \iff az^3 + (-2a+b)z^2 + (-2b+c)z - 2c = 0$

Par identification, on obtient : $\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -4 - 6i \\ -2b + c = -4 + 20i \\ -2c = 16(1-i) \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 - 6i \\ c = -8 + 8i \\ égalité \ vraie \end{cases}$

L'équation (E) est donc $\boxed{(z-2)\left(z^2 - (2+6i)z - 8 + 8i\right) = 0}$

b) Résolvons d'abord $z^2 - (2+6i)z - 8 + 8i = 0$

$$\Delta = (2+6i)^2 - 4(-8+8i) = 4 - 36 + 24i + 32 - 32i = -8i$$

D'après la question **1)** Δ a pour racines $z_1 = 2 - 2i$ et $z_2 = -2 + 2i$

Les solutions de l'équation $z^2 - (2+6i)z - 8 + 8i = 0$ sont :

$$z = \frac{2 + 6i + 2 - 2i}{2} = 2 + 2i \qquad \text{et} \qquad z = \frac{2 + 6i - 2 + 2i}{2} = 4i$$

Les solutions de (E) sont donc $\boxed{\{2 ; \ 2 + 2i ; \ 4i\}}$