

Calculatrices et documents interdits. Il faut soigner la rédaction et la présentation. Barème : 5points/exercice.

EXERCICE 1

1) Donner les développements limités d'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \sin x \quad x \mapsto \cos x \quad x \mapsto \tan x \quad x \mapsto \ln(1+x)$$

2) En utilisant des développements limités, calculer la limite en 0 de chacune des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \quad x \mapsto \frac{2 \tan x - \sin 2x}{\sin^3 x} \quad x \mapsto \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$$

EXERCICE 2

1) Donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction :

$$x \mapsto \ln\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)$$

2) En déduire la tangente T au point d'abscisse 0 à la courbe représentative C de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln(4 + 4x + 2x^2)$$

3)a) Préciser, au voisinage de 0, la position de T par rapport à C.

b) Tracer T et C au voisinage de 0. On donne : $\ln 2 \approx 0,69$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = x^2(e^{\frac{1}{x}} - 1)$

1) Déterminer $\lim_{\infty} f$.

2) On se propose de rechercher une droite asymptote (d) à la courbe représentative C de f en l'infini.

a) On pose, pour $x \neq 0$, $h = \frac{1}{x}$ puis $f(x) = g(h)$. En utilisant un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $(e^h - 1)$, donner l'expression de $g(h)$ au voisinage de 0.

b) En déduire, qu'au voisinage de l'infini, $f(x) - \left(x + \frac{1}{2}\right) \sim \frac{1}{6x}$.

c) Conclure sur la droite asymptote (d) recherchée et sur sa position par rapport à C.

EXERCICE 4

On rappelle que : $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

1) En faisant une double intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$J = \int_0^{2\pi} e^{-x} \cos 2x dx$$

2) En déduire le calcul de l'intégrale :

$$K = \int_0^{2\pi} e^{-x} \sin^2 x dx$$

