UCP/ PCST S1 **CONTRÔLE DE MATHEMATIQUES DU 16/12/11**

Calculatrices et documents interdits. Il faut soigner la rédaction et la présentation.

Il est signalé entre parenthèses le temps estimé pour traiter l'exercice.

Barème prévisionnel : 7 – 5 – 5 – 3

EXERCICE 1 (20 min)

1) a) Déterminer les quatre réels a, b, c, d tels que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} - \{\pm 1\}\,, \quad \frac{t^2}{1-t^4} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

b) En déduire, $\int \frac{t^2}{1-t^4} dt$

2) Soit l'intégrale $I = \int_0^{\pi/6} \frac{sin^2 x}{\cos(2x)} dx$

a) Montrer que $I = \int_0^{\pi/6} \frac{tan^2 x}{1-tan^2 x} dx$

b) Au moyen du changement de variable $t = tanx$, calculer I.

EXERCICE 2 (15 min)

Soit I un intervalle où le sinus ne s'annule pas, c'est-à-dire I inclus ou égal à l'un des intervalles $]k\pi, (k+1)\pi[$ ($k \in \mathbb{Z}$). On considère l'équation différentielle du premier ordre :

$\forall x \in I$, $\quad y' sinx - y cosx + 1 = 0 \quad$ (E)

1) On pose $z = \frac{y}{sinx}$ avec y une solution de (E).

Montrer que z vérifie l'équation différentielle : $z' = -\frac{1}{sin^2 x}$ (E')

2) a) Calculer, sur I, la dérivée de la fonction *cotan* définie par : $cotanx = \frac{cosx}{sinx}$

b) En déduire la résolution des équations (E') puis (E).

EXERCICE 3 (15 min)

Soit l'équation différentielle du second ordre : $y'' + y' - 2y = e^x - x - 1$ (E)

1) Résoudre l'ESSM : $y'' + y' - 2y = 0$

2) a) Rechercher une solution particulière de (E) sous la forme $y_p = axe^x + (bx + c)$ avec *a, b, c* réels.

(selon le principe de superposition)

b) En déduire la solution générale de (E).

EXERCICE 4 (10 min)

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^2 - (3 - 2i)z + 2 - 2i = 0$. On pourra remarquer qu'il y a une solution réelle.

2) En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $z^4 - (3 - 2i)z^2 + 2 - 2i = 0$