Examen de rattrapage 19/06/12
Mathématiques pour les sciences

Exercice I : (4 points)

On considère la fonction $f(x)=x\,e^{\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)}$.

On veut déterminer une équation de son asymptote en $+\infty$.

1) On pose $x=\frac{1}{h}$. Montrer que $\frac{2x}{x^2-1}=\frac{2h}{1-h^2}$;

2) Donner un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 1 de : $\frac{1}{1-t}$;

3) En déduire un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de : $\frac{1}{1-h^2}$,

   puis à l'ordre 3 de $\frac{2h}{1-h^2}$;

4) Donner un développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 3 de e^t, puis de $e^{\left(\frac{2h}{1-h^2}\right)}$;

5) Enfin écrire le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de $\frac{1}{h}e^{\left(\frac{2h}{1-h^2}\right)}$;

6) Déterminer alors le développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$, et donner une équation de son asymptote.

Exercice II : (4 points)

1) En remarquant que (x² + 1)' = 2x, calculer l'intégrale $I=\int_0^1 2x\arctan(x)\,dx$;

2) On veut calculer une primitive de la fonction $x\to\frac{\tan x(3\tan x-1)}{\tan x-1}$.

   a) En posant le changement de variable $u=\tan x$, donner une autre écriture de la fonction $J(x)=\int\frac{\tan x(3\tan x-1)}{\tan x-1}dx$;

   b) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\frac{u(3u-1)}{(u-1)(1+u^2)}=\frac{a}{u-1}+\frac{bu}{1+u^2}+\frac{c}{1+u^2}$;

   c) Donner les primitives de $u\to\frac{1}{u-1}$, $u\to\frac{2u}{1+u^2}$ et $u\to\frac{1}{1+u^2}$;

   d) Déterminer une écriture (sans signe $\int$) de la fonction $J(x)$.

Examen de rattrapage 19/06/12

Mathématiques pour les sciences

Exercice III : (4 points)

On considère l'équation : (G) $xy'-2y=(x-1)(x+1)^3$.

a) Résoudre l'équation sans second membre : $xy'-2y=0$, on notera y_0 cette solution ;

b) On cherche une solution particulière de l'équation (G) sous la forme $y_1=x^2 g(x)$.
Calculer y_1' et en déduire que la fonction g doit être solution de l'équation différentielle :
$g'(x)=x+2-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}$.

c) Déterminer g et donner l'écriture des solutions de (G) sur $\mathbb{R}$.

Exercice IV : (4 points)

On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante : (F) $y''+y'-6y=\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x+x)$.

a) Résoudre l'équation sans second membre : $y''+y'-6y=0$, on notera y_0 cette solution ;

b) Pour résoudre l'équation $y''+y'-6y=\mathrm{e}^{2x}$, on cherche la solution y_1 sous la forme $y_1=(ax+b)\mathrm{e}^{2x}$. Calculer y_1' puis y_1'' et déterminer alors le réel a ;

c) Pour résoudre l'équation $y''+y'-6y=x\,\mathrm{e}^x$, on cherche la solution y_2 sous la forme $y_2=(cx+d)\mathrm{e}^x$. Calculer y_2' puis y_2'' et déterminer alors les réels c et d ;

d) Donner l'écriture des fonctions solutions de l'équation (F) en précisant la méthode qui permet d'utiliser les résultats des questions b) et c).

Exercice V : (4 points)

On doit résoudre l'équation à coefficients complexes suivantes : (E) $X^6-(1+\mathrm{i})X^3+\mathrm{i}=0$.

a) Donner les racines cubiques de l'unité sur $\mathbb{C}$, c'est à dire les solutions de $X^3-1=0$;

b) Développer et simplifier le nombre : $A=(1-\mathrm{i})^2$;

c) Résoudre l'équation : $z^2-(1+\mathrm{i})z+\mathrm{i}=0$;

d) Résoudre alors l'équation (E).