UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

PCST S1 EXAMEN DE MATHEMATIQUES (durée 3h)

Les documents et calculatrices sont interdits. Il sera tenu compte de la rédaction

et de la présentation : vos résultats doivent être soulignés.

Barème prévisionnel : 3 - 5 - 5 - 4 - 3

EXERCICE 1

1) Déterminer le développement limité d'ordre 6 au voisinage de 0 de la fonction

$$f\,:\;x\longmapsto 2\cos(x^2)+(sinx)^4-2$$

Rappel : $(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

2) En déduire $\lim_{x\to0} sin\left(\frac{\pi}{2}e^{\frac{2\cos(x^2)+(sinx)^4-2}{x^5}}\right)$.

EXERCICE 2 *Les 3 questions sont totalement indépendantes*

1) a) Calculer la dérivée de la fonction f définie par : $f(x)=(arctanx)^2$.

b) On pose, $I=\int_0^1 x(arctanx)^2dx$. Au moyen d'une intégration par parties montrer que :

$$I=[\,\tfrac{1}{2}(x^2+1)(arctanx)^2\,]_0^1-\int_0^1 arctanx\;dx$$

c) En déduire le calcul de l'intégrale I.

2) Au moyen du changement de variable $u=sinx$, calculer l'intégrale $J=\int_0^{\pi/3} sin^2x\,cos^3x\,dx$.

3) a) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{5x^2-14x+11}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

b) En déduire le calcul de l'intégrale $K=\int_3^4\frac{5x^2-14x+11}{(x-1)^2(x-2)^2}dx$.

EXERCICE 3

1) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle du premier ordre :

$$xy'-(x-1)y=0$$

Indication : On pourra montrer que les solutions sont du type $y=K\frac{e^x}{|x|}$ $(K\in\mathbb{R})$.

On ne demande pas qu'une simple vérification. ../..

2)a) Donner les solutions générales sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$ de l'équation différentielle

$$xy' - (x-1)y = -1$$

Indication : pour la recherche d'une solution particulière on utilisera la méthode de la variation de la constante.

b) Rappeler le développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de e^x.

c) Par le choix de constantes, montrer qu'il existe une fonction *f* que l'on définira, continue sur $\mathbb{R}$,

telle que , sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\mathbb{R}^{-*}$, elle soit solution de l'équation différentielle.

d) Montrer que la fonction *f* est dérivable en 0.

EXERCICE 4

Soit l'équation différentielle du second ordre : $y'' - 2y' - y = 0$ (E)

1) Déterminer la solution générale de (E).

2) Déterminer la fonction g solution de l'équation (E) vérifiant les deux conditions suivantes :

$g(0) = 2$ et $g(1+\sqrt{2}) = e^{3+2\sqrt{2}} + e^{-1}$.

3) Donner le développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de *g.*

Rappel : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

EXERCICE 5

1) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^{12} = 1$. On donnera les solutions sous forme exponentielle

complexe puis sous forme algébrique.

2) Montrer que, pour tout nombre complexe u différent de 1, on a :

$$1 + u + u^2 + \cdots + u^n = \frac{1-u^{n+1}}{1-u} \quad (n \in \mathbb{N})$$

3) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$.
