Contrôle de mathématiques PCST S1 du 10/12/10 de 14h15 à 15h45

Il faut soigner la rédaction et la présentation. Les documents et calculatrices sont interdits. Barème prévisionnel : 6 - 7 - 7

Exercice 1 *Les 2 questions sont totalement indépendantes*

1) a) Donner un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions définies par :

$$f(x) = xe^{sinx} - \ln(1+x) \quad \text{et de} \quad g(x) = x(1-cosx)$$

b) En déduire

$$\lim_{x\to 0} \frac{xe^{sinx} - \ln(1+x) - \frac{3}{2}x^2}{x(1-cosx)}$$

2) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$h(x) = \frac{x^2-2x-1}{x}\, e^{-\frac{1}{x}}$$

a) On pose $t = \frac{1}{x}$ et $\varphi(t) = h(\frac{1}{t})$. Montrer, en faisant un développement limité au voisinage de 0, que :

$$t\varphi(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2}\, t^2 + o(t^2)$$

b) En déduire que le graphe de h admet une asymptote oblique dont on donnera l'équation.

Déterminer la position du graphe par rapport à l'asymptote lorsque $x \to \infty$.

Exercice 2 *Les 2 questions sont totalement indépendantes*

1)a) En faisant une double intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(2x) e^{-x}\, dx$$

b) Retrouver le résultat de I en utilisant une formule d'Euler.

2) Soit l'intégrale $J = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{3+cos^2x} dx$

a) On pose $t = tanx$. Montrer que l'on a : $J = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{t^2+\frac{4}{3}}\, dt$

b) En déduire la valeur de J.

c) Soit f la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+cos^2x}}$

Calculer le volume, en unité de volume, du solide engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe représentative de *f*. *../..*

Exercice 3

1) Montrer qu'il existe trois constantes réelles α, β, γ à déterminer telles que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*,\ \frac{x^2-1}{x(x^2+x+1)} = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+x+1}$$

2) Soit l'équation différentielle du premier ordre définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$x(x^2+x+1)y' - (x^2-1)y = 2x+1 \qquad (1)$$

a) Donner la solution générale de l'ESSM : $x(x^2+x+1)y' - (x^2-1)y = 0$

b) Par la méthode de variation de la constante, rechercher une solution particulière de l'équation complète (1).

c) En déduire la solution générale de (1) puis la solution vérifiant $y(1) = 0$.