UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

PCST S1 CONTRÔLE DE MATHEMATIQUES DU 22/10/10

Vous devez soigner la rédaction et la présentation : les résultats doivent être soulignés ou encadrés. Barème prévisionnel : 5 - 8 – 7.

Les calculatrices, le formulaire et tout document sont interdits.

EXERCICE 1

1) Cours : quand dit-on qu'une fonction f, définie en a, est continue en a ? Dérivable en a ?

2) Soit f la fonction définie par : $\forall\, x \in]-1;1[\setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{1}{x}\left(cosx - \frac{1}{cosx}\right)$.

i) Montrer que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $f(x) = -x\left(\frac{sinx}{x}\right)^2 \frac{1}{cosx}$.

ii) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$. En déduire le prolongement continu g de f en 0.

iii) Montrer que g est dérivable en 0 et donner la valeur de $g'(0)$.

EXERCICE 2 Les 3 questions sont totalement indépendantes

1) Les fonctions sont définies sur la partie E de $\mathbb{R}$ indiquée. Déterminer l'ensemble E' où les fonctions sont dérivables et déterminer la dérivée première.

$f_1(t) = \sin(t^2 + t + 1) \qquad E = \mathbb{R}$;

$f_2(u) = \sqrt{2u^2 - 3u + 1} \qquad E =]-\infty; 1/2] \cup [1; +\infty[$;

$f_3(x) = ln(lnx) \qquad E =]1; +\infty[$.

2) On pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $thx = \frac{shx}{chx}$ avec, $shx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ et $chx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

- Etudier le comportement de th en $\pm\infty$.
- Calculer la dérivée de th. En déduire son sens de variation.
- Justifier que th est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J à préciser.

3) i) Cours : soit f une fonction de classe C^3 sur $\mathbb{R}$. Donner la formule de Taylor-Young donnant un développement limité de f d'ordre 3 au voisinage de 0.

ii) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = Arctanx$.

- Calculer les dérivées première, seconde et troisième de f.
  On les notera respectivement $f^{(1)}, f^{(2)}, f^{(3)}$.
- Donner un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $Arctan$.

../..

EXERCICE 3

1) i) Donner des développements limités d'ordre 3 au voisinage de 0 de :

$$sinx - x \quad ; \quad e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

ii) En déduire $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{sinx - x}$.

2) i) Donner des développements limités d'ordre 3 au voisinage de 0 de :

$$x\ln(1+x)$$

ii) En déduire $\lim_{x \to 0} \frac{x\ln(1+x) - x^2}{x^3}$.

3) **QUESTION FACULTATIVE : Hors barème (+2 bonus)**

i) Donner un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de :

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}$$

ii) En déduire $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3}$.