UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Exercice 1:

On considère le fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}$ sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};0\right[\cup\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Écrire un développement limité (DL) de $\sin x$ à l'ordre 3 en 0.
2) En déduire un DL de $\sin^2 x$ à l'ordre 4 en 0.
3) Simplifier l'expression $\frac{x^2}{\sin^2 x}$ et écrire un DL de $\frac{x^2}{\sin^2 x}$ à l'ordre 4 en 0.
4) En déduire un DL à l'ordre 4 en 0 de $x^2 f(x)$, puis de $f(x)$.
5) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0? Si oui, préciser la valeur de $f(0)$.
6) En reprenant les calculs précédents à un ordre supérieur, déterminer si la fonction f est dérivable en 0?

Exercice 2: On veut calculer $I=\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x}dx$.

1) Montrer que : $\frac{\cos x+2\sin x}{\sin x-\cos x} = \frac{1+2\tan x}{\tan x-1}$.
2) En posant le changement de variable $u=\tan x$, montrer que $I=\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1+2u}{(u-1)(1+u^2)}du$.
3) Déterminer les trois réels a, b et c tels que $\frac{1+2u}{(u-1)(1+u^2)} = \frac{a}{u-1}+\frac{bu+c}{1+u^2}$.
4) En utilisant l'égalité $\frac{1-3u}{2(1+u^2)}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{1+u^2}-\frac{3}{4}\times\frac{2u}{1+u^2}$, finir le calcul de I.

Exercice 3:

Soit (E) l'équation différentielle suivante : $(E) \qquad (t+1)y'+y=(t+1)e^t$.

1) Déterminer les solutions de l'équation sans second membre (ESSM).

2) Pour trouver une solution particulière de (E), on pose $y(t)=\dfrac{K(t)}{t+1}$.
   Calculer y' et montrer alors que $K'(t)=(t+1)e^t$.

3) Déterminer la fonction K et montrer que $y(t)=\dfrac{te^t+C}{t+1}$ où $C\in\mathbb{R}$

Exercice 4:

Soit (F) l'équation différentielle suivante : $(F) \qquad y''-3y'+2y=te^{2t}$.

1) Déterminer les solutions de l'équation sans second membre (ESSM).

2) On veut déterminer une solution particulière de (F) sous la forme $y_2=P(t)e^{2t}$ où P est un polynôme dont on justifiera le degré.
   Calculer y_2' puis y_2'' et en les remplaçant dans (F) déterminer les coefficients du polynôme *P*.

3) Déduire des deux questions précédentes que les solutions de (F) s'écrivent :
   $y(t)=Ae^t+(\frac{1}{2}t^2-t+B)e^{2t}$.

4) Déterminer la solution de (F) telle que $y(0)=0$ et $y'(0)=0$.