UNIVERSITÉ
de Cergy-Pontoise

Il sera tenu compte de la clarté, de la précision et de la concision de la rédaction.
Les documents et les calculatrices sont interdits. Barème prévisionnel : 7-7-6

EXERCICE 1 *Les 3 questions peuvent être traitées séparément*

1) Soit l'équation différentielle :

$$y'' - 3y' - 4y = -5e^{-x} \qquad \text{(E)}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, y' et y'' désignant respectivement la dérivée première et la dérivée seconde de y.

a) Résoudre l'équation différentielle :

$$y'' - 3y' - 4y = 0 \qquad (E_0)$$

b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = xe^{-x}$
Vérifier que la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

d) Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions initiales $f(0) = 2$ et $f'(0) = -1$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)e^{-x}$

a) Donner un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction $x \longmapsto e^{-x}$.
En déduire un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de f.

b) Déduire de a) une équation de la tangente T à la courbe représentative C de f au point d'abscisse 0. Etudier la position relative de C et T au voisinage de 0.

3) Soit α un réel strictement supérieur à 1 et $I(\alpha) = \int_0^{\alpha} (x+2)e^{-x}dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties calculer $I(\alpha)$ en fonction de α.

b) Calculer $\lim_{\alpha\to+\infty} I(\alpha)$. Donner une interprétation graphique du nombre trouvé.

EXERCICE 2 *Les 3 questions peuvent être traitées séparément*

1) Soit l'équation différentielle :

$$(1+x)y' + y = \frac{1}{1+x} \qquad \text{(E)}$$

où y est une fonction de la variable x, définie et dérivable sur $]-1; +\infty[$, y' désignant la dérivée première de y.

a) Soit l'équation différentielle :

$$(1+x)y' + y = 0 \qquad (E_0)$$

Montrer que la solution générale de (E_0) est donnée par les fonctions définies par :

$$g(x) = \frac{k}{1+x} \quad \text{où } k \text{ est une constante réelle.}$$

../..

b) On se propose de rechercher une solution particulière de (E) sous la forme :

$$h(x) = \frac{j(x)}{1+x} \text{ où } j \text{ est une fonction dérivable définie sur }]-1\,;+\infty[.$$

- Exprimer que la fonction h est solution de (E) . En déduire une fonction j .
- Expliciter une fonction h répondant à la question.

c) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

d) Déterminer la solution f de (E) vérifiant la condition initiale : $f(0) = 2$.

2) Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par : $f(x) = \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}$

a) Donner un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de f.

b) Déduire de a) une équation de la tangente T à la courbe représentative C de f.

3) a) Soit l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{\ln(1+x)}{1+x}\,dx$. Calculer I au moyen du changement de variable $t = \ln(1+x)$.

b) Calculer l'intégrale $J = \int_0^2 \frac{2+\ln(1+x)}{1+x}\,dx$.

EXERCICE 3

Soient les fonctions f et g définies sur $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ par : $f(x) = \frac{1}{2+sinx}$ et $g(x) = \frac{1}{2-sinx}$

1) a) Calculer les dérivées de f et de g. Préciser $f'(0)$, $g'(0)$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) En déduire les variations de f et de g.

2) On considère l'intégrale $I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{2-sinx} - \frac{1}{2+sinx}\right)\,dx$.

a) Montrer que $I = \int_0^{\pi/2} \frac{2sinx}{3+cos^2x}\,dx$.

b) Au moyen du changement de variable $t = cosx$, montrer que $I = 2\int_0^1 \frac{dt}{3+t^2}$.

c) Calculer I .

d) En s'aidant du graphique ci-dessous interpréter le résultat de I.