UCP / MS1PCST **CONTRÔLE du 11/12/09 (14h15 à 15H15)**

Les documents et calculatrices sont interdits. Faire des efforts de rédaction et présentation.

Barème prévisionnel : 5 – 3 – 6 – 6

EXERCICE 1 *Les 2 questions sont indépendantes*

1) a) Sur $R-\{-1\}$ décomposer en éléments simples $\dfrac{u}{u+1}$.

b) Calculer, au moyen du changement de variable $u=e^x$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{-x}}dx$.

2) a) En faisant une intégration par parties calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 te^t dt$.

b) En déduire, au moyen d'un changement de variable adéquat, la valeur de $\displaystyle\int_0^1 e^{\sqrt{x}}dx$.

Interpréter graphiquement le résultat.

EXERCICE 2

1) Calculer l'intégrale : $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$.

2) Soit la fonction f définie sur $[1,2]$ par : $f(x)=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$.

Déterminer le volume, en unité de volume, du solide obtenu par rotation autour de l'axe des abscisses de la courbe représentative de f.

EXERCICE 3

1) Soit l'intégrale $\displaystyle\int \frac{t^2-1}{2t-1}dt$.

a) On pose $u=2t-1$. Exprimer l'intégrale précédente à l'aide de u.

b) Calculer $\displaystyle\int \frac{t^2-1}{2t-1}dt$.

2) Calculer, au moyen du changement de variable $t=\sin x$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{-\pi/6} \frac{\cos^3 x}{1-2\sin x}dx$.

EXERCICE 4

On se propose de résoudre l'équation différentielle du 1er ordre :

$$(x^2-x)y'-(x-2)y=x^4e^x \quad \text{(E)}$$

1) Sur $R^*-\{1\}$, déterminer deux réels a et b tels que : $\dfrac{x-2}{x^2-x}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x-1}$.

En déduire $\displaystyle\int \frac{x-2}{x^2-x}dx$.

2) a) Résoudre l'équation homogène : $(x^2-x)y'-(x-2)y=0$.

b) Rechercher une solution particulière de (E) sous la forme,

$y=z\dfrac{x^2}{x-1}$ avec z une fonction de classe C^1 que l'on déterminera.

c) Donner la solution générale de l'équation (E).

d) Déterminer la solution y de (E) telle que : $y(2)=0$.