

Attention à la rédaction et présentation de votre copie .Soulignez vos résultats
Documents et calculatrices interdits. Barème prévisionnel : 4-5-5-6

Exercice 1

- 1) Rappeler le théorème des accroissements finis.
- 2) Appliquer ce théorème à la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2}$ sur l'intervalle $[0,999 ; 1]$.
- 3) Montrer que : $\forall x \in [0,999 ; 1]$, $|f'(x)| \leq 3$.

En déduire une majoration de l'erreur si l'on écrit $\frac{1}{0,999^2} \approx 1$.

Exercice 2

- 1) Donner un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de :

$$\sin x, \cos x, e^x, e^{-x}, \operatorname{ch}x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \operatorname{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

- 2) En déduire un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de :

$$\operatorname{sh}x - \sin x, x(\operatorname{ch}x - \cos x).$$

- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}x - \sin x}{x(\operatorname{ch}x - \cos x)}$.

Exercice 3

- 1) Donner un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\ln(1 + y)$.

- 2) Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \ln(3 + 3x + x^2)$.

- a) Montrer que $f(x) = \ln 3 + \ln\left(1 + x + \frac{x^2}{3}\right)$.

- b) En déduire un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de f .

- 3) Utiliser le 2) pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0. Etudier la position de la courbe et de sa tangente.

Exercice 4

- 1) Montrer, par la méthode de votre choix, qu'au voisinage de 0 on a :

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2).$$

- 2) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$.

L'objectif est de rechercher une droite asymptote à la courbe représentative de g lorsque $x \rightarrow +\infty$

- a) On pose $h = \frac{1}{x}$. Montrer que $g(x) = G(h) = \frac{1}{h} \sqrt{1+h+2h^2}$

- b) Montrer, en utilisant le 1), que $G(h) = \frac{1}{h} + \frac{1}{2} + \frac{7}{8}h + o(h)$

- c) Donner l'expression de $g(x)$. En déduire la droite asymptote et préciser la position de l'asymptote par rapport à la courbe de g .