

Il faut soigner la rédaction et la présentation. Les résultats doivent être soulignés.
Les documents et calculatrices sont interdits.
Barème prévisionnel : 5 points par exercice.

EXERCICE 1

Calculer, en les justifiant, les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} ; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{1}{x}\right) e^{\sin x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1+x} \quad (\text{on pourra se ramener en } 0) ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\text{Arc tan } x - \pi/3}{x - \sqrt{3}}.$$

EXERCICE 2

1) Cours : rappeler la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f admette un prolongement par continuité en un réel a .

2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2 + 2^{\tan x}}$.

a) Déterminer les limites de $\tan x$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures et supérieures.

b) En déduire les limites de $2^{\tan x}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{2}$ par valeurs inférieures et supérieures.

c) La fonction f est-elle prolongeable par continuité à droite de $\frac{\pi}{2}$? À gauche de $\frac{\pi}{2}$? En $\frac{\pi}{2}$?

EXERCICE 3

Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = e^{3x} - 1 - 3x - \frac{9x^2}{2}$ et $g(x) = \sin(3x) - 3x$.

1) Justifier que les fonctions f et g sont de classe C^3 .

Calculer les dérivées d'ordre 3 notées $f^{(3)}$, $g^{(3)}$.

2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(3)}(x)}{g^{(3)}(x)}$.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$. On justifiera rigoureusement sa réponse.

EXERCICE 4

1) Cours : Rappeler le théorème des valeurs intermédiaires (pas ses corollaires)

2) Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{1}{2}]$ par : $g(x) = f(x + \frac{1}{2}) - f(x)$.

a) En utilisant la fonction g , montrer : $\exists a \in [0, \frac{1}{2}]$ tel que $f(a + \frac{1}{2}) = f(a)$.

b) Une voiture parcourt une distance de 200 km en 2 h. Montrer qu'il existe sur le trajet deux points distants de 100 km tels que la voiture mette 1h pour parcourir la distance entre ces points.