

PCST S1 MATHÉMATIQUES SESSION 2 (15/06/10 de 15h30 à 17H)

Les documents et calculatrices sont interdits. Barème prévisionnel : 6 – 7 – 7

EXERCICE 1

1) Donner un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$x \mapsto x \ln(1+x) \quad ; \quad x \mapsto e^{\sin x}$$

2) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x \ln(1+x)} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1 - x - \frac{x^2}{2} - x^3}{x \cos x - \sin x}$$

EXERCICE 2

1) a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{t^2}{1+t^2} = a + \frac{b}{1+t^2}$$

b) En utilisant une intégration par parties, calculer :

$$\int_0^1 \ln(1+t^2) dt$$

2) Au moyen du changement de variable $t = 1 + x^4$, calculer l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{x^7}{(1+x^4)^2} dx$$

EXERCICE 3

1) Pour tout réel x distinct de 1 résoudre l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' + (1-x)y = 0$$

2) a) En déduire, pour tout réel x distinct de 1, la résolution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$y' + (1-x)y = \frac{x e^{\frac{x^2}{2}} - x}{x^2 + 1} \quad (\text{E})$$

b) Déterminer la solution de (E) vérifiant : $y(0) = 0$.

3) Résoudre l'équation différentielle du second ordre :

$$y'' + y' - 2y = e^x - x - 1$$

On cherchera une solution particulière du type $P(x)e^x + Q(x)$ avec P, Q deux polynômes.