UNIVERSITÉ de Cergy-Pontoise

EXAMEN DE MATHEMATIQUES du 13/01/10 (14h-17h)

Tout résultat doit être justifié rigoureusement. Il faut faire des efforts de présentation et souligner vos réponses. Les documents et calculatrices sont interdits.
Barème prévisionnel : 5 – 6 – 4 – 5.

Exercice 1

1) Donner les développements limités d'ordre 5 au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \cos x - 1 \qquad g : x \mapsto x(e^x - 1)$$

2) En déduire qu'un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction

$$h : x \mapsto \frac{\cos x - 1}{x(e^x - 1)}$$

est donné par $h(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$.

3) a) En déduire que la fonction h se prolonge en une fonction k dérivable en 0. En utilisant la formule de Taylor - Young, préciser $k(0)$ et $k'(0)$.

b) Donner l'équation de la tangente T en 0 à la courbe représentative C de k. Etudier la position de T par rapport à C.

4) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \left(n \frac{\cos(1/n) - 1}{e^{1/n} - 1} + \frac{1}{2} \right)$. *Indication* : utiliser le comportement de h en 0.

Exercice 2 *Les 2 parties sont largement indépendantes.*

Partie A

Soit l'équation différentielle du premier ordre définie par :

$$\forall x \in]-1,1[\,, \qquad y' + \frac{x}{1-x^2}\, y = 1 \qquad \text{(E)}$$

1) Résoudre l'équation différentielle $y' + \frac{x}{1-x^2}\, y = 0$.

2) Rechercher une solution particulière de (E) de la forme :

$y = z\sqrt{1-x^2}$ avec z une fonction de classe C^1 à déterminer.

Indication : $\forall x \in]-1,1[$, $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3) En déduire que la solution de (E) vérifiant $y(0)=0$ est donnée par : $y=\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $f(x)=\sqrt{1-x^2}\,\arcsin x$.
On se propose de rechercher un développement limité d'ordre 5 au voisinage de 0 de f sous la forme : $f(x)=ax+bx^3+cx^5+o(x^5)$.

1) Soit g la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $g(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$.

Justifier qu'un développement limité d'ordre 4 au voisinage de 0 de g est donné par :

$$g(x)=x+x^3+o(x^4).$$

2) Montrer que l'on a :

$$\forall x\in]-1,1[,\quad f'(x)+\frac{x}{1-x^2}f(x)=a+(a+3b)x^2+(a+b+5c)x^4+o(x^4).$$

3) En exprimant que f est solution de l'équation différentielle (E), déterminer les coefficients réels a,b et c. Conclure sur le développement limité de f recherché.

Exercice 3

Soit l'équation différentielle du second ordre :

$$y''+2y'+y=x^3+3e^{2x}\quad \text{(E)}$$

1) Résoudre l'équation différentielle : $y''+2y'+y=0$.
2) Soient les deux équations différentielles :

$$y''+2y'+y=x^3\qquad (1)$$
$$y''+2y'+y=3e^{2x}\qquad (2)$$

a) Rechercher une solution particulière de (1) sous la forme :

$y=ax^3+bx^2+cx+d$ avec a,b,c,d des constantes réelles à déterminer .

b) Rechercher une solution particulière de (2) sous la forme :

$y=ke^{2x}$ avec k une constante réelle à déterminer.

3) Déduire des questions précédentes, selon le principe de superposition, la solution générale de l'équation (E).

Exercice 4

1) a) Donner $\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$.

b) Déterminer les deux constantes réelles a et b telles que,

$$\forall x \in R, \quad \frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{a}{x^2+1} + \frac{b}{(x^2+1)^2}$$

2) a) En faisant une intégration par parties, montrer que :

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \frac{x}{x^2+1} + 2\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

b) Utiliser le 1) pour calculer $\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$.

3) Soit l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{1}{(t^2+3)^2}\,dt$.

a) Calculer I à l'aide des questions précédentes.

b) Retrouver I au moyen du changement de variable $t = \sqrt{3}\tan u$.