UCP/ PCST S1 **Contrôle de mathématiques du 12/12/08 (Durée 1H30)**

Les documents et calculatrices sont interdits. Faire des efforts de rédaction et de présentation pour bien justifier vos résultats. Ces derniers doivent être soulignés ou encadrés. Barème prévisionnel : 5 – 7 – 8

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$. Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

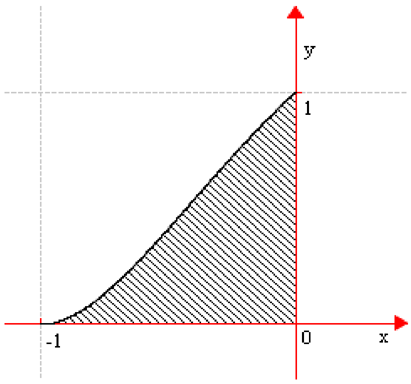
1) Soit $I = \int f(x)dx$.

Calculer I en faisant une double intégration par parties.

2) La figure ci-après représente l'arc de courbe C définie pour $x \in [-1;0]$.

a) Déterminer, en unités d'aires, l'aire de la partie hachurée.

b) On procède à la rotation de l'arc de courbe autour de l'axe (Ox).
Exprimer l'intégrale qui mesure, en unités de volumes, le volume du solide de révolution ainsi engendré. On ne demande pas de calculer l'intégrale.



Exercice 2 Les deux questions sont totalement indépendantes

1) Calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{x+3}{(x+1)(x+2)^2}dx$.

2) a) En posant $u = 1+x^2$, calculer $\int \frac{x}{(1+x^2)^2}dx$.

b) Déterminer deux constantes réelles α et β telles que pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{2x^2-3x+2}{(1+x^2)^2} = \frac{\alpha}{1+x^2} + \frac{\beta x}{(1+x^2)^2}.$$

En déduire une primitive F de f.

c) En utilisant un changement de variable calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{(2e^{2t}-3e^t+2)e^t}{(1+e^{2t})^2}dt$$

../..

Exercice 3

Soient les deux intégrales indéfinies :

$$I_1 = \int \frac{1}{t^2+1}dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int \frac{1}{(1+t^2)^2}dt\,.$$

1) Calculer I_1.

2) Soient les fonctions f , F définies sur R par :

$$f(t) = \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2}\ , \qquad F(t) = \frac{t}{1+t^2}\,.$$

a) Justifier que F est une primitive de f sur R.

b) En déduire que : $2I_2 - I_1 = \dfrac{t}{1+t^2}$

c) Calculer I_2.

3) Soit l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(x^2+4)^2}dx\,. \qquad (1)$$

On se propose de calculer J de deux manières différentes.

a) En posant $t = \dfrac{x}{2}$, montrer que : $J = \dfrac{1}{8}\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{(1+t^2)^2}dt.$

En déduire la valeur de J.

b) Retrouver la valeur de J en faisant le changement de variable $x = 2\tan u$ dans l'intégrale (1)

Pour cette question on admettra que : $\dfrac{1}{32}\sin(2\mathrm{Arc}\tan\dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{40} = 0{,}025$.