UCP/ PCST S1 **Contrôle de mathématiques du 14/11/08**

Documents et calculatrices interdits. Faire des efforts de rédaction et de présentation. Barème prévisionnel : 5,5 – 7 – 7,5

EXERCICE 1

1) Donner un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $\cos x$, $\sin x$, e^x.

2) En déduire,

a) un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de

$$2+3x-\cos x-\sin(2x)-e^x.$$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+3x-\cos x-\sin(2x)-e^x}{x^3}$.

EXERCICE 2

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x)=\ln(x^2+3x+3)$.

1) Justifier que,

$$\forall x\in \mathrm{R},\quad f(x)=\ln 3+\ln(1+x+\frac{x^2}{3}).$$

2) a) Donner un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de la fonction

$$g:\ u\mapsto \ln(1+u)$$

b) En déduire que, au voisinage de 0, $\ln(1+x+\frac{x^2}{3})=x-\frac{x^2}{6}+o(x^2)$.

3) - Donner un développement limité d'ordre 2 de f au voisinage de 0.
- En déduire l'équation de la tangente T au point d'abscisse 0 à la courbe C de f.
- Etudier la position de C par rapport à T.

EXERCICE 3

1) Montrer, en utilisant la formule de Taylor -Young, qu'un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\sqrt[3]{1+u}$ est donné par :

$$\sqrt[3]{1+u}=(1+u)^{1/3}=1+\frac{1}{3}u-\frac{1}{9}u^2+o(u^2)$$

2) Soit g la fonction définie par : $g(x)=(x^3-x^2)^{1/3}$.

a) Montrer que l'on a, pour x non nul,

$$\frac{g(x)}{x}=\left(1-\frac{1}{x}\right)^{1/3}$$

b) En déduire qu'au voisinage de $\pm\infty$,

$$\frac{g(x)}{x}=1-\frac{1}{3x}-\frac{1}{9x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\quad \text{puis que}\quad g(x)=x-\frac{1}{3}-\frac{1}{9x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

3) En déduire l'équation de la droite D asymptote à la courbe C de g.

Etudier la position relative de C par rapport à D.