UCP / L1 PCST S1 CONTROLE DE MATHEMATIQUES (17/10/08 de 14H30- 15H30)

Les calculatrices et documents sont interdits. Faire des efforts de rédaction et de présentation. Barème prévisionnel : 5 - 5 - 4 - 6

Exercice 1

Soit la fonction f définie sur] –1 ;1[par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$.

1) Etudier sa parité. Calculer les limites de f en –1 et 1.
2) Déterminer le sens de variation de f .
3) En déduire que f est bijective de] –1 ;1[dans un intervalle à préciser.

Exercice 2

Les questions sont indépendantes.

1) Peut-on prolonger par continuité les fonctions suivantes aux points indiqués ?

$f : x \mapsto (1+x)^{1/x}$ en 0 ; $g : x \mapsto x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0

2) Calculer les limites suivantes:

$\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\cos^2 x - \cos^2\alpha}{e^x - e^\alpha}$ $(\alpha \in R)$; $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x\ln x - (x-1)}{(x-1)^2}$.

Indication : on pourra utiliser la règle de l'Hôpital.

Exercice 3

Citer le théorème de Leibniz (hypothèses + conclusion)
En déduire la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $f : x \mapsto (x^2 + x)e^x$

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur R par : $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Est-elle continue en 1 ? Est-elle dérivable en 1 ? Est-elle continue et dérivable sur R ?
2) Citer le théorème des accroissements finis (hypothèses + conclusion).
3) Montrer que :

$\exists c \in]0 ;2[$ tel que $f(2) - f(0) = 2f'(c)$.

Déterminer toutes les valeurs possibles de c.