

UCP / MS1- PCST MATHEMATIQUES SESSION 2 (16/06/09 de 13h30 à 15h)

Les documents et calculatrices sont interdits.

Barème : 5 – 7 - 8

Exercice 1

1) Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cos x - (x + 1)}{x^3}$.

2) Les fonctions précédentes sont-elles prolongeables par continuité en 0 ? On justifiera la réponse.

Exercice 2

1) Décomposer en éléments simples, sur l'ensemble des nombres réels, la fraction

rationnelle : $\frac{t^2}{1-t^4}$.

2) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int \frac{t^2}{1-t^4} dt$.

b) $\int_0^{\pi/6} \frac{\sin^2 x}{\cos(2x)} dx$ au moyen du changement de variable $t = \tan x$.

Exercice 3

1) Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$xy' + (1-x)y = \frac{xe^x}{x^2 + 1}. \quad (E)$$

a) Trouver toutes les solutions de (E) sur \mathbb{R}^{+*} et \mathbb{R}^{-*} .

b) Montrer qu'il existe une solution unique de (E) sur \mathbb{R} .

2) Résoudre l'équation différentielle du second ordre suivante avec les conditions initiales données :

$$y'' - 3y' + 2y = xe^x \quad \text{avec } y(1) = 0 \text{ et } y'(1) = 0.$$
