UCP/PCST S1 Contrôle du 30/11/07 (14h - 15h30)

Les documents et calculatrices sont interdits. Barème prévisionnel : 7 – 6 - 7

Exercice 1

1) Former les développements limités d'ordre 3, au voisinage de zéro, de

$$\sin x,\quad \tan x,\quad e^x,\ \ln(1+x).$$

2) En utilisant des développements limités d'ordre 3, au voisinage de 0, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\tan x-\sin(2x)}{\sin^3 x}\quad ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)-\tan x}{\sin x+\tan x}.$$

3) En utilisant un développement limité d'ordre adéquat au voisinage de 0 calculer :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{3/x^2}\quad ;\quad \lim_{x\to 0}\left[\ln(e+x)\right]^{1/x}$$

Exercice 2 Les parties A et B sont totalement indépendantes

A . 1)a) Déterminer les deux réels a, b tels que :

$$\forall x\in R,\quad \frac{2x^2}{1+x^2}=a+\frac{b}{1+x^2}$$

b) En déduire $\int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx.$

2) En faisant une intégration par parties, calculer $\int \ln(1+x^2)dx.$

3) On considère la fonction $f : x\mapsto \ln(1+x^2)-x^2$.

On se place dans un repère orthonormé du plan. Calculer l'aire algébrique A(c) comprise entre la courbe de f l'axe des abscisses et les droites parallèles d'équations $x=0$ et $x=c$.

B. Soit f la fonction définie sur [0 ;1] par : $f(x)=xe^{2x}$.

Dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) , déterminer le volume du solide Σ engendré par rotation de la courbe Γ de f autour de l'axe (O, $\vec{i}$).On pourra représenter l'allure de Σ.

Exercice 3 Les trois questions sont indépendantes.

1) Soit la fraction rationnelle définie sur R\{1 ; 3} par : $F(x)=\dfrac{x^2+6x-1}{(x-3)^2(x-1)}$.

a) Décomposer F en éléments simples.

b) Calculer $\int F(x)\,dx.$

2) Soit l'intégrale : I $=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{1+2\cos^2 x}.$

a) On pose $u=\tan x$. Montrer que I = $\displaystyle\int_0^1\frac{du}{3+u^2}.$

b) Calculer I.

3) Calculer l'intégrale J = $\displaystyle\int_0^3\frac{x\,dx}{1+\sqrt{x+1}}$ au moyen du changement de variable t = $\sqrt{x+1}$.