

UCP /PCST S1 Examen session 2 mathématiques du 10/06/08 (durée 1h30)

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Vous êtes invités, dans la mesure du possible, à encadrer vos résultats.

L'usage des documents et calculatrices est interdit.

Barème prévisionnel : 4 - 6 - 6 - 4.

Exercice 1

Soit f l'application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\begin{cases} f(x) = e^x - x & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \cos^2 \pi x & \text{si } x \in [0;1] \\ f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0 et 1.
- 2) Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, calculer, en unité d'aire, l'aire du domaine D défini par :
 $D = \{M(x;y) / -1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq f(x)\}$

Exercice 2

- 1) Calculer les limites en zéro des fonctions de la variable x définies par :

$$\frac{2 \sin(3x)}{2x - 3 \sin(2x)} ; \quad \frac{\sin x - x \cos x}{x(1 - \cos x)} ; \quad \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{3/x^2} .$$

- 2) Calculer les limites en l'infini des fonctions de la variable x définies par :

$$\tan\left(\frac{1}{x}\right)e^{\sin x} ; \quad x(e^{1/x} + e^{2/x} - 2).$$

Exercice 3

- 1) Au moyen du changement de variable précisé, calculer les intégrales suivantes :

$$J = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x + \cos x}{3 + \sin(2x)} dx . \quad (\text{En posant } u = \sin x - \cos x)$$

.. /..

2) Calculer l'intégrale $K = \int x^2 \ln(x^6 - 1) dx$.

On fera le changement de variable $u = x^3$ avant d'intégrer par parties.

Exercice 4

L'espace est rapporté à un repère orthonormal. Soient les points $A(1 ; 3 ; 2)$, $B(3 ; -1 ; 6)$ et $C(5 ; 2 ; 0)$

1) Justifier que ces trois points déterminent un plan unique noté P.

2) Déterminer un vecteur normal à ce plan P.

3) Donner une équation cartésienne de ce plan.

4) Soit Q le plan d'équation : $x + y + z = 1$.

Etudier l'intersection entre les plans P et Q. S'il y a lieu, caractériser leur intersection.
