UCP /PCST S1 EXAMEN DE MATHEMATIQUES DU 7/01/08 (9h – 12h)

Soignez la rédaction et la présentation de votre copie. Dans la mesure du possible, soulignez ou encadrez vos résultats . Calculatrices et documents interdits.

Barème prévisionnel : **5 – 6 – 6 - 3**

EXERCICE 1

1) a) Montrer que , pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, il existe trois constantes réelles a, b, c, que l'on déterminera, telles que :

$$\frac{t^2}{1-t^4} = \frac{a}{1-t} + \frac{b}{1+t} + \frac{c}{1+t^2}.$$

b) En déduire $\int \frac{t^2}{1-t^4}\,dt$.

2) Soit l'intégrale $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx$.

a) Justifier que, sous réserve d'existence, la fonction tangente est dérivable telle que :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

b) En posant $t = \tan x$, montrer que

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx = \int \frac{t^2}{1-t^4}\,dt \;;$$

c) • En déduire $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx$.

• Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$ telle que : F(0) = 0.

EXERCICE 2

Soit f la fonction réelle définie sur R\{-1} par :

$$f(x) = \frac{e^x(\cos x - \sin x)}{1+x} - \frac{e^x \cos x}{(1+x)^2}.$$

1) En intégrant par parties la fonction $g : x \mapsto \frac{e^x \cos x}{(1+x)^2}$, montrer que,

$$\int \frac{e^x \cos x}{(1+x)^2}\,dx = -\frac{e^x \cos x}{1+x} + \int \frac{e^x(\cos x - \sin x)}{1+x}\,dx .$$

<u>Indication</u> : Pour l'intégration par parties on chercherait une primitive de

$$x \mapsto \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$$

2) En déduire toutes les primitives de la fonction f.

../..

3) Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{x^3}{1+x}\,y' + \frac{x^2(2x+3)}{(1+x)^2}\,y = f(x) \qquad \text{(E)}$$

a) On pose $u(x) = \dfrac{x^3}{1+x}$

- Calculer la dérivée u' de u.
- Montrer que l'équation différentielle (E) peut s'écrire sous la forme :
  $(u \times y)'(x) = f(x)$ (E')

b) En intégrant, membre à membre, (E') montrer que la solution générale de l'équation différentielle (E) est donnée par :

$$y(x) = \frac{e^x \cos x}{x^3} + \frac{k(1+x)}{x^3}$$ où k est une constante réelle. (I)

c) Déterminer la solution de (E) vérifiant : $y(\pi/2) = 0$.

4) En exprimant la solution générale (I) de (E) sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[\ ;\ ]-1,0[\ ;\ ]0,+\infty[$, peut-on raccorder les solutions aux points critiques ?

EXERCICE 3

1) Soit g la fonction réelle définie sur $]-1,+\infty[$ par : $g(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$.

a) En rappelant la dérivée de la fonction $t \mapsto t^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathrm{R},\ t \in \mathrm{R}^{+*})$, calculer $g^{(1)}, g^{(2)}, g^{(3)}$ les dérivées première, seconde et troisième de g et préciser les valeurs en 0 de g et de ses trois dérivées successives.

b) En utilisant la formule de Taylor-Young , montrer que les développements limités à l'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions g et tangente sont donnés par :

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)\ ;\quad \tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

2) Soit f la fonction réelle définie sur $]-\frac{\pi}{4},0[\cup]0,\frac{\pi}{4}[$ par : $f(x) = \dfrac{e^{\sqrt{1+\sin x}} - e}{\tan x}$.

a) Donner un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 des fonctions :
$x \mapsto 1+\sin x$; $x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$.

b) Montrer qu'un développement limité d'ordre 3 au voisinage de 0 de $x \mapsto e^{\sqrt{1+\sin x}}$ est donné par : $e + \dfrac{ex}{2} - \dfrac{ex^3}{16} + o(x^3)$.

c) En déduire $\lim\limits_{0} f$. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On note h ce ce prolongement.

d) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{h(x)-h(0)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat trouvé.

../..

EXERCICE 4 Les questions sont totalement indépendantes

On se place dans un repère orthonormé direct de l'espace.

1) Soient les points P(2, 1, 5) , Q(-1, 3, 4) et R (3, 0 , 6). Déterminer :

a) un vecteur normal au plan (PQR) ainsi qu'une équation cartésienne de ce plan.

b) l'aire du triangle PQR.

2) Soient les vecteurs $\vec{a}(6, 3, -1)$; $\vec{b}(0, 1, 2)$; $\vec{c}(4, -2, 5)$

Calculer le volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.

3) On suppose que $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont trois vecteurs non coplanaires.

a) Comment peut-on traduire l'hypothèse précédente ?

b) On pose $\alpha = \dfrac{1}{\overrightarrow{v_1}.(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3})}$ puis, $\overrightarrow{k_1} = \alpha(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3})$; $\overrightarrow{k_2} = \alpha(\overrightarrow{v_3} \wedge \overrightarrow{v_1})$;

$\overrightarrow{k_3} = \alpha(\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{v_2})$.

Montrer que :

- Pour tout i, j prenant les valeurs 1, 2, 3 avec $i \neq j$ on a : $\overrightarrow{k_i} \perp \overrightarrow{v_j}$.
- Pour tout i prenant les valeurs 1, 2, 3 on a : $\overrightarrow{k_i}.\overrightarrow{v_i} = 1$.

(ces vecteurs sont utilisés en cristallographie)