UCP/ PCST S1 MATHEMATIQUES (Durée 1h30)

Les documents et les calculatrices sont interdits.Il faut soigner la rédaction et la présentation.Souligner ou encadrer les résultats.

EXERCICE 1 (7 points) Les trois questions sont totalement indépendantes

1) En appliquant le th.des accroissements finis à la fonction $f : t \mapsto \arctan t$ sur l'intervalle $[0, x]$ avec $x>0$, montrer que : $\frac{x}{x^2+1} < \arctan x < x$.

2) Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x+1}$.En utilisant les dérivées successives de f , donner un développement limité d'ordre 3 de f au voisinage de 0.

3) a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{e^x - 1}$; $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\tan x - \sin(2x)}{\sin^3 x}$.

b) Les deux fonctions précédentes peuvent-elles être prolongées par continuité en 0 ?

EXERCICE 2 (6 points)

Soit la fonction définie sur R-$\{\pm 1\}$ par : $f(x) = xe^{\frac{2x}{x^2-1}}$.

1) Déterminer $\lim\limits_{\infty} f$.

2) On pose $X = \frac{1}{x}$.On se propose d'étudier, au voisinage de 0,la fonction $g : X \mapsto X.f\left(\frac{1}{X}\right)$

a) Montrer que $g(X) = e^{\frac{2X}{1-X^2}}$.

b) Montrer, en utilisant un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, que , $\frac{2X}{1-X^2} = 2X + o(X^2)$. Indication : faire la division des deux polynômes.

c) En déduire que $g(X) = 1 + 2X + 2X^2 + o(X^2)$.

d) En utilisant les questions précédentes justifier que $f(x) = x + 2 + \frac{2}{x} + o(\frac{1}{x})$.En déduire une droite asymptote à la courbe représentative de f .Etudier les positions relatives.

EXERCICE 3 (7 points) Les deux questions sont totalement indépendantes

1) Soit l'équation différentielle du premier ordre : $xy' + y = e^x$. (1)

a) Pour tout réel $x > 0$, résoudre l'équation différentielle proposée.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$.En déduire que (1) admet une solution unique, notée f , telle que $\lim\limits_{0} f = 1$. Expliciter f .

c) On suppose dans cette question que f est définie sur R*.Donner un développement limité d'ordre n de f au voisinage de 0.

2) Soit l'équation différentielle du second ordre : $y'' + 4y' + 4y = 18.chx$ avec, $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) Résoudre l'équation différentielle proposée.On cherchera une solution particulière du type $y_1 = ae^x + be^{-x}$, où a et b sont deux réels à préciser.

b) Retrouver, directement, le résultat précédent en posant dans l'équation différentielle proposée $y = e^{-2x}u(x)$ où u est une fonction deux fois dérivable que l'on déterminera.