UCP / PCST S1 **EXAMEN DE MATHEMATIQUES**

Les documents et calculatrices sont interdits.Vous devez soigner la rédaction et la présentation de votre copie.

EXERCICE 1 Les questions sont indépendantes

1) a) Justifier que $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin(x+1/2)-\pi/6}{x}$.

b) Soit $a \in R$, calculer $\lim\limits_{x\to a}\frac{\arctan x - \arctan a}{e^x - e^a}$.

2) Donner un développement limité à l'ordre 4 en 0 de f : $x \mapsto e^{\cos x}$.On pourra remarquer que f est paire.

3) Soit g : $x \mapsto \frac{(\sin x)^x - x^x}{(\tan x)^x - x^x}$

a) Montrer que : $(\sin x)^x - x^x = x^x(-\frac{x^3}{6} + o(x^3))$ et, $(\tan x)^x - x^x = x^x(\frac{x^3}{3} + o(x^3))$.

On rappelle que $a^x = e^{x\ln a}$ pour $a > 0$

b) Calculer la limite de g en 0.

4) Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)\ln(\tan x)$, $\lim\limits_{x\to \pi/4}(\tan x)^{\tan(2x)}$ (on peut se ramener en 0)

5) Soit la fonction h : $x \mapsto \frac{x^2+1}{x-1}e^{1/x}$.

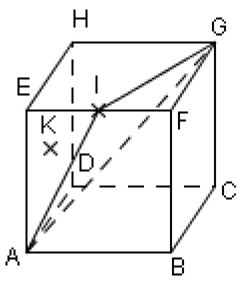
a) Calculer les limites de h en 1 et en ∞.

b) Montrer qu'au voisinage de l'infini on a : $h(x) = x + 2 + \frac{7}{2x} + o(\frac{1}{x})$;

c) En déduire l'étude des branches infinies du graphe de h.

EXERCICE 2

Soit le cube ABCDEFGH représenté ci-dessous.



On suppose l'espace orienté par le repère orthonormal direct (A ; $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$).

On désigne par I le milieu de [EF] et par K le centre du carré ADHE (point de concours des diagonales).

1) a) Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$.

b) En déduire l'aire du triangle IGA.

2) Calculer le volume du tétraèdre ABIG et en déduire la distance du point B au plan (AIG). **../..**

EXERCICE 3

L'espace est muni d'un repère orthonormal direct.
Soit les plans P, P', P'' d'équation cartésienne respective :
$x-3y+z=-2$, $x+2y+2z=2$, $2x+y-z=6$.

1) En justifiant que les plans P et P' sont sécants , caractériser la droite D d'intersection en précisant un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$ de cette droite.
2) Etudier l'intersection de la droite D avec le plan P''.
3) Retrouver le résultat précédent en résolvant un système de trois équations à trois inconnues.

EXERCICE 4

Soit l'équation différentielle du premier ordre :

$$(x^2-1)y'-2xy=x^2+8x+1 \quad \text{(E)}$$

1) Déterminer la solution générale de (E).On cherchera une solution particulière du type un polynôme de degré 1.
2) On appelle courbe intégrale de (E) la représentation graphique de la solution générale de (E).
   a) Par quels points du plan rapporté à un repère passe-t-il :
      - une infinité de courbes intégrales de (E) ?
      - aucune courbe intégrale de (E) ?
      - une seule courbe intégrale de (E) ?
   b) Tracer, dans un même repère, les courbes intégrales passant par les points :
      - A(0 ; - 4).
      - B(- 3 ; -5)

EXERCICE 5

Un oscillateur excité est décrit par l'équation différentielle du second ordre :

$$y''+2y'+5y=5\cos t \quad \text{(E)}$$

1) a) Déterminer la solution générale de (E).On recherchera une solution particulière du type $a\cos t+b\sin t$ où a, b sont deux réels à déterminer.
   b) Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions initiales : $y(0)=y'(0)=0$.
2) Que devient la solution générale trouver au 1)a) lorsque $t \to +\infty$? Comment peut-on interpréter ce résultat ?