# Examen de Mathématiques pour les Sciences

Examen du 14 janvier 2014 - 1ère session – **Durée : 2h30**

*Les documents, téléphones portables, smartphones et calculatrices ne sont pas autorisés*
*Certaines questions ayant un degré légèrement plus élevé de difficulté ont été signalées d'un astérisque*

**Exercice 1.** Soit les matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ (matrice $3 \times 2$) et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (matrice $2 \times 3$).

**1.** Dire pourquoi les produits de matrices $P = A \cdot B$ et $M = B \cdot A$ sont bien définis et préciser les tailles de $P$ et $M$.

**2.** Calculer les matrices $P$ et $M$.

**3.** Calculer le déterminant $\det P$.

**4*.** Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Soit (E) l'équation matricielle $M \cdot X = R$.

**(4.a)** Écrire un système (S) d'équations linéaires d'inconnues $x$ et $y$, qui équivaut à (E).

**(4.b)** Justifier pourquoi (S) admet une solution unique.

**(4.c)** Trouver cette solution.

**Exercice 2.** **(a)** Donner $DL_3(0)$ (développement limité à l'ordre 3 en zéro) des fonctions suivantes:

$$f(x) = \sin(x^2), \quad g(x) = \sqrt{1+x^2}, \quad h(x) = \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right).$$

[Indication: pour $g$ on pourrait calculer ses dérivés $g', g''$ et utiliser la formule de Taylor en $X = 0$: $g(X) = g(0) + g'(0)X + \frac{1}{2!}g''(0)X^2 + o(X^2)$]

**(b)** Étudier la limite suivante: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\sin(x^2)}$, et la calculer si elle existe.

**Exercice 3.** Soit $\mathbb{R}^3$ muni d'un répère orthonormal $Oxyz$. On se donne dans ce répère la droite $\mathcal{D}$ passant par l'origine $O = O(0;0;0)$ et par le point $A = A(1;-1;0)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 3y - z - 2 = 0$.

**1.** Trouver un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ au plan $\mathcal{P}$.

**2.** Trouver un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{D}$.

**3.** En déduire que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ ont un seul point d'intersection, qu'on notera $Q = Q(s;t;r)$. Trouver ses coordonnées, i.e. le triplet $(s,t,r) \in \mathbb{R}^3$.

**4.** Soit $\mathcal{N}$ la droite normale au plan $\mathcal{P}$ et qui passe par le point $A = A(1;-1;0)$. Trouver un système d'équations paramétriques définissant $\mathcal{N}$. En déduire un système d'équations cartésiennes pour $\mathcal{N}$.

**5.** Trouver les coordonnées $(a,b,c)$ du point $M$ d'intersection de la droite $\mathcal{N}$ avec le plan $\mathcal{P}$ (autrement dit, de la projection orthogonale de $A$ sur le plan $\mathcal{P}$).

**6*.** Soit $B$ la projection orthogonale de $M$ sur $\mathcal{D}$. Trouver la longueur du segment $MB$.

**7*.** En écrivant de deux façons différentes l'aire du triangle $\triangle AMQ$, indiquer (sans calcul numérique) comment retrouver les coordonnées du point $Q = Q(s;t;r) = \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$. [Indication: on pourrait utiliser les deux questions précédentes]

**Tournez la page s.v.p.** ↪

**Exercice 4.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels obéissant à la relation de récurrence

$$(\mathrm{R}) \quad u_{n+1} = u_n^3 - 3u_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

**1.** **(a)** En supposant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite $l$ lorsque $n \to \infty$, donner les valeurs possibles pour cette limite. [Indication: on passera à la limite dans (R)].

**(b)** Trouver l'expression d'une fonction $f$ telle que l'on puisse écrire $u_{n+1} = f(u_n)$.

**(c)** Etudier les variations de la fonction $f$ (notamment les extrema) afin de pouvoir la representer graphiquement. [Indication: $\sqrt{3} \approx 1,73$]

**2.** Supposons que $u_0 = 1$. Calculer $u_1$ et $u_2$, dessiner la "toile d'araignée" pour cette suite et en déduire sa limite (justifier!).

**3.** Supposons que $u_0 = 3$. Dessiner la "toile d'araignée" pour cette suite et en déduire (non-rigoureusement) la nature de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce cas.

**4*.** Supposons que $u_0 > 2$.

**(a)** En mettant (R) sous la forme $u_{n+1} = (u_n^2 - 4)u_n + u_n$ montrer par récurrence qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

**(b)** En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

**(c)** Peut-on affirmer qu'une suite positive quelconque est nécessairement divergente dès lors qu'elle est strictement croissante? Justifier brièvement.

**(d)** Montrer que la suite de terme général $d_n = u_{n+1} - u_n$ est aussi strictement croissante et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $d_n > d_0$.

**(e)** En déduire (par récurrence ou par calcul direct) qu'on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_0 > (n+1)d_0$ et conclure sur la nature de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas $u_0 > 2$.