L1 - S1 - **MS1** Année univ. **2013 - 2014 - SESSION 2**

CORRIGÉ de l'EXAMEN de MATHS pour SCIENCES 1

(examen du 17.06.2014)

EXERCICE 1 :

1 $^tA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ est 3×2

$^tA\cdot B$ est produit de mat. $3\times \underline{2}$ par $\underline{2}\times 2$ donc 3×2 (faut que ce soit le même nombre.)

$B\cdot A$ — " — $2\times \underline{2}$ par $\underline{2}\times 3$ donc 2×3

$A\cdot {}^tA$ — " — $2\times \underline{3}$ par $\underline{3}\times 2$ donc 2×2

2 $B\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$^tA\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

donc $^t(BA) = {}^tA\cdot B$; **3.a** $\det B = 0$.

3.b Le produit de matrices est associatif. Sachant que "le déterminant d'un produit est le produit des déterminants" on pourrait, <u>à tort</u>, appliquer cette règle en écrivant $\det P = (\det B)\cdot(\det A)\cdot(\det {}^tA)\cdot(\det B)$ alors que, ^tA et A ne sont pas carrées et donc le dét n'a pas de sens pour elles. C'est là qu'il faut utiliser l'associativité du produit des matrices, en écrivant P comme produit de 3 matrices <u>carrées</u> : $B\cdot(A\cdot{}^tA)\cdot B$.

Donc l'écriture correcte sera : $\det P = \det B \det(A{}^tA)\det B$.

Or $\det B = 0$ donc $\det P = 0$.

3.c $P = (BA)\cdot({}^tAB) \overset{(2)}{=} 4^2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 4^2\cdot\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} =$

$= 4^2\cdot 3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 48\,B$. Donc $\lambda = 48$.

<u>Obs</u> : à (3.**b**) et (3.c) on a utilisé l'associativité du produit des matrices de deux manières différentes.

EXERCICE 2 :

On sait : $\cos X \underset{X=0}{=} 1 - \frac{1}{2}X^2 + o(X^3)$ (*)

1 On pose $X = 2t$ (donc $X=0 \Leftrightarrow t=0$) d'où

$\cos(2t) \underset{t=0}{=} 1 - \frac{1}{2}(2t)^2 + o(t^3) = 1 - 2t^2 + o(t^3)$

$\sin^2(x^2) = \frac{1}{2}(1-\cos(2x^2)) = \frac{1}{2}(\cancel{1} - \cancel{1} + 2x^4 + o(x^5)) = x^4 + o(x^5)$

2 Ici on posera $X = 2x^2$ dans (*) et on utilisera le DL(0) de l'exponentielle : $e^X = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + o(X^2)$ où l'on posera $X = x^4$, donc :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(2x^2)-1}{e^{x^4}-1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{1} - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}^2x^4 + o(x^5) - \cancel{1}}{\cancel{1} + x^4 + o(x^5) - \cancel{1}} =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{x^4}(-2 + o(x))}{\cancel{x^4}(1 + o(x))} = -2$

EXERCICE 3 :

1 On sait que pour un plan donné par éq. cartésienne $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$ le vecteur $\vec{n} \perp$ plan sera donné par $\vec{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Ds. notre cas : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2 $\mathcal{D}$ passe par l'origine, donc $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

3 Il faut s'assurer que $\mathcal{D} \not\subset \mathcal{P}$ et que $\mathcal{D} \not\parallel \mathcal{P}$, ce qui arrive ssi $\vec{n}\cdot\vec{d} \neq 0$ (produit scalaire). Or $\vec{n}\cdot\vec{d} = 1 + 2 + (-1)(-1) = 4 \neq 0$. Donc $\mathcal{D}\cap\mathcal{P}$ est formé d'un seul point.

4 $\mathcal{D} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\vec{d},\ \forall t\in\mathbb{R}\}$

donc des éq. param. de $\mathcal{D}$ sont : $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ (*), $\forall t\in\mathbb{R}$

$I(a;b;c) = \mathcal{P}\cap\mathcal{D} \Leftrightarrow (a,b,c)$ vérifie (*) et l'éq. cartésienne du plan $\mathcal{P}$, c'est à dire, on a $t\in\mathbb{R}$ t.q. $t + 2t - (-t) = 8 \Leftrightarrow t = 2$ donc

$I = I(2;2;-2)$

5 Dans (*) on élimine le paramètre t. On obtient $\begin{cases} x = y \\ x = -z \end{cases}$ (par exemple)

6 Cf. cM, si $\mathcal{P}$ est défini par $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ et P le projeté orthogonal de $M = M(x_M ; y_M ; z_M)$ sur le plan $\mathcal{P}$, alors :

$$\text{dist}(M, \mathcal{P}) = \|\vec{MP}\| = \frac{|\alpha x_M + \beta y_M + \gamma z_M + \delta|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}$$

et $\vec{PM} = \|\vec{MP}\| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ où $\vec{n}$ vect normal à $\mathcal{P}$: $\vec{n} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

Pour notre cas, la première formule s'écrit :

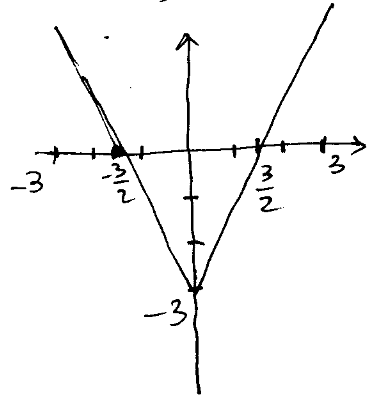
$$\|\vec{MP}\| = \frac{|1\cdot 1 + 2\cdot 1 - 1\cdot(-1) - 8|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

EXERCICE 4 : **1** Si $\exists \lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ alors $\exists \lim_{n\to\infty} |u_n| = |\ell|$ (la réciproque est fausse). Alors en passant à $\lim_{n\to\infty}$ dans (R), sous l'hypothèse que $\exists \lim_{n\to\infty} u_n = \ell$ on a :

$\ell = 2|\ell| - 3 \iff (\ell \geq 0 : \ell = 2\ell - 3)$ ou $(\ell \leq 0 : \ell = -2\ell + 3)$

$\iff \ell = 3$ ou $\ell = -1$.

2 $f(x) = 2|x| - 3$



3 $u_0 = 2$

3.a $u_1 = 1$
$u_2 = -1$
$u_3 = -1$ … etc…

Donc, la relation (R) munie de la condition initiale $u_0 = 2$ semble avoir une solution unique, à savoir la suite stationnaire :

$u_0 = 2$; $u_1 = 1$; $u_n = -1$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$

3b Pour l'affirmer avec certitude, il faut raisonner par récurrence : si $u_n = -1$ vérifie (R) alors $u_{n+1} = 2|u_n| - 3 = 2|-1| - 3 = -1$.

Ceci **confirme le dessin** de la Toile d'araignée, qui se réduit au point $(-1,1)$ à partir du $2^{\text{ème}}$ terme.