L1 - S1 - MPI   Année Univ. 2013 - 2014

CORRIGÉ de L'EXAMEN DE MATHS pour SCIENCES

MS1 - Session 1 (14.01.2014)

EXERCICE 1 :

(1) Le bilan des tailles est le suivant :

taille de P = taille A * taille B = $(3\times 2) * (2 * 3) = 3\times 3$

taille de M = taille B * taille A = $(2\times 3) * (3\times 2) = 2\times 2$

Donc $P = AB \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R}) \equiv \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et $M = BA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(2) $P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$; $M = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\det P = 0$ (par calcul en utilisant la "règle de Sarrus" ou en développant suivant la 1ère colonne (car elle a le plus de zéros) ou tout simplement en remarquant que les premières 2 lignes sont proportionnelles)

(4) (a) $MX = R \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3x+3y \\ -x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ -x = 1 \end{cases}$ (S)

(b) (S) a sol. unique ssi M est inversible, car alors (E) $\Leftrightarrow X = M^{-1}R$ fournit cette solution.

Ceci arrive ssi $\det M \neq 0$. Or $\det M = 3 \neq 0$. Donc (S) est un système de Cramer et son unique solution est :

(c) $x = -1$ et $y = 1$.

EXERCICE 2 :

Obs : on tiendra compte du fait que f, g, h sont composées de fonctions plus simples. Par ex :

$x \overset{(\cdot)^2}{\longmapsto} x^2 \overset{\sin}{\longrightarrow} \sin(x^2)$ donc on note $X = x^2$,

et comme $x = 0 \Rightarrow X = 0$ on utilise le DL(0) de sin (cf CM : DL des fonctions composées).

(a) $\sin(x^2) \underset{x=0}{=} x^2 - \dfrac{(x^2)^3}{3!} + \underbrace{\dfrac{(x^2)^5}{5!} + o((x^2)^7)}_{o(x^3)}$
$= x^2 + o(x^3)$

$\sqrt{1+x^2} \underset{x=0}{=} 1 + \dfrac{1}{2}x^2 \underbrace{- \dfrac{1}{8}(x^2)^2 + o((x^2)^3)}$
$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$ $\hookrightarrow \equiv Y \to 0$ si $x \to 0$

$\ln(\sqrt{1+x^2}) \underset{x=0}{=} \ln(1+Y) \underset{Y=0}{=} Y - \dfrac{Y^2}{2} + \dfrac{Y^3}{3} + o(Y^4)$

$\underset{x=0}{=} \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{4}x^4 + o(x^6) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$

Ou bien... $\ln(\sqrt{1+x^2}) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) = \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

(b) On utilise les DL_3 de (a) pour déduire :

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\sqrt{1+x^2})}{\sin(x^2)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{x^2}\left(\frac{1}{2} + o(x)\right)}{\cancel{x^2}(1+o(x))} = \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 3 :

① On sait (CM) que si l'éq. cartésienne d'un plan est $\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta=0$ alors un vecteur normal au plan sera $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$. Dans notre cas $\mathcal{P}: 2x+3y-z-2=0 \Rightarrow \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$.

② Un vecteur directeur d'une droite définie par deux points de $\mathbb{R}^3$ a comme composantes la différence des coordonnées des deux points, (composante par composante). Ds. notre cas c'est facile, car $\mathcal{D}$ passe par **O** donc $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

③ ◦ Le produit scalaire $\vec{u}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=-1\neq 0$ donc $\mathcal{D}\not\perp\vec{n}$ donc $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$ (i.e. ni contenue ds. $\mathcal{P}$, auquel cas on aurait $\mathcal{D}=\mathcal{D}\cap\mathcal{P}$, ni contenue dans un plan $\mathcal{P}''\parallel\mathcal{P}$, auquel cas on aurait $\mathcal{D}\cap\mathcal{P}=\emptyset$). Donc $\operatorname{card}(\mathcal{D}\cap\mathcal{P})=1$.

• Soit $Q=Q(s;t;r)\in\mathcal{D}\cap\mathcal{P} \iff$

$\begin{cases}2s+3t-r-2=0 & \leftarrow \text{éq. de } \mathcal{P}\\ r=0 \\ s+t=0\end{cases}$ $\Big\}$ car $\mathcal{D}\subset xOy$ est la $2^{\text{ème}}$ bissectrice dans le plan xOy

$\iff \begin{cases}s=-2\\t=2\\r=0\end{cases} \Rightarrow Q=Q(-2;2;0)\equiv\mathcal{D}\cap\mathcal{P}$

④ Tout point $N\in\mathcal{N}$ $(N\equiv N(x;y;z))$ vérifie :

$$\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{ON}}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{\overrightarrow{OA}}+t\underbrace{\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}}_{\vec{n}} \iff \begin{cases}x=1+2t\\y=-1+3t\\z=-t\end{cases} \quad (*)$$

(syst. d'éq. paramétriq. pour $\mathcal{N}$)

En éliminant en $(*)$ le paramètre t, on déduit le système d'éq. cartésiennes pour $\mathcal{N}$:

$$\begin{cases}x \quad +2z=1\\ \quad y+3z=-1\end{cases} \quad (**)$$

⑤ Comme $M\equiv M(a;b;c)=\mathcal{N}\cap\mathcal{P}$ on pourrait résoudre le système (de Cramer, forcement, puisque $\mathcal{N}\perp\mathcal{P}$) :

$\begin{cases}a \quad +2c=1\\ \quad b+3c=-1\\ 2a+3b-c=2\end{cases}$ $\begin{matrix}\Big\}(**) \text{ i.e. } M\in\mathcal{N}, \text{ cf (4)}\\ \text{i.e. } M\in\mathcal{P}\end{matrix}$

(et ensuite calculer $\|\overrightarrow{MA}\|$ = longueur du segment MA avec le thm. de Pythagore, dans le triangle rectangle ΔOMA).

Alternativement, on pourrait utiliser (les formules du CM) :

$$\begin{cases}\operatorname{dist}(A,\mathcal{P})=\|\overrightarrow{MA}\|=\dfrac{\alpha x_A+\beta y_A+\gamma z_A+\delta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}\\[2ex] \overrightarrow{MA}=\|\overrightarrow{MA}\|\dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\end{cases}$$

où $\mathcal{P}=\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta$ et $\vec{n}$ = vect. normal à $\mathcal{P}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$

Pour notre cas,

$$\|\overrightarrow{MA}\| = \frac{2(1)+3\cdot(-1)-(0)-2}{\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}} = -\frac{3}{\sqrt{14}}$$

Aussi, $\|\vec{n}\| = \sqrt{2^2+3^2+(-1)^2} = \sqrt{14}$, d'où

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{3}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = -\frac{3}{14}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

Les coordonnées du point M résultent de :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \frac{3}{14}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix}20\\-5\\-3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow M = M\left(\frac{10}{7}; -\frac{5}{14}; -\frac{3}{14}\right)$$

(6) On utilise les formules du thm. du CM :

$$\begin{cases} \overrightarrow{OB} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\left(\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \cdot \overrightarrow{OM}\right) \\ \text{dist}(M, \mathcal{D}) \equiv \|\overrightarrow{MB}\| = \sqrt{\|\overrightarrow{OM}\|^2 - \|\overrightarrow{OB}\|^2} \end{cases}$$

où $\vec{u}$ est un vect. directeur de $\mathcal{D}$ et où on a choisi comme pt. de référence sur $\mathcal{D}$ l'origine.

On a : $\|\vec{u}\|^2 = 1^2+(-1)^2+0^2 = 2$, donc

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\vec{u}\left[\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{14}\begin{pmatrix}20\\-5\\-3\end{pmatrix}\right] = \frac{25}{28}\vec{u}$$

$$\|\overrightarrow{OM}\|^2 = \frac{1}{(14)^2}\left(20^2+25+9\right) = \frac{434}{(14)^2}$$

$$\|\overrightarrow{OB}\|^2 = \frac{(25)^2}{4} \cdot \frac{1}{(14)^2} \cdot \|\vec{u}\|^2 = \frac{(25)^2}{2} \cdot \frac{1}{(14)^2}$$

donc $\|\overrightarrow{MB}\| = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{868-625}{2}} = \frac{1}{14}\sqrt{\frac{9^2 \cdot 3}{2}} = \frac{9}{14}\sqrt{\frac{3}{2}}$

(7) Le triangle ΔAMQ est rectangle en M donc d'une part,

$$\mathcal{A}_{\Delta AMQ} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\overrightarrow{QM}\|$$

D'autre part, comme $\overrightarrow{MB} \perp \mathcal{D}$, $\overrightarrow{MB}$ est une hauteur dans ΔAMQ donc

$$\mathcal{A}_{\Delta AMQ} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{MB}\| \cdot \|\overrightarrow{QA}\|$$

Donc $\|\overrightarrow{QA}\| = \dfrac{\|\overrightarrow{AM}\| \cdot \|\overrightarrow{QM}\|}{\|\overrightarrow{MB}\|}$

Une fois la longueur du segment QA trouvée, comme A était donné par l'énoncé on peut trouver les coordonnées de Q.

EXERCICE 4 :

(1.a) Si $\exists \lim_{n\to\infty} u_n$ et elle vaut ℓ ($|\ell|<\infty$) on passe à la limite dans (R) et on a :

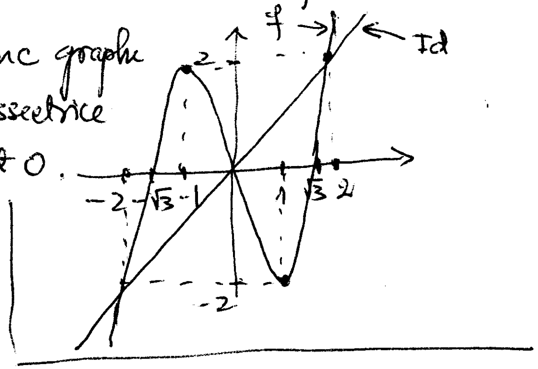
$$\ell = \ell^3 - 3\ell \Leftrightarrow \ell(\ell^2-4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases}\ell = 0 \text{ ou} \\ \ell = 2 \text{ ou} \\ \ell = -2.\end{cases}$$

(1.b) (R) $\Leftrightarrow u_{n+1} = f(u_n)\ \forall n$ où $f(x) = x^3 - 3x$.

(1.c) $f(x) = x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})$. Racines : $0, \pm\sqrt{3}$.

$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$. Racines : ± 1. $f(\pm 1) = \mp 2$.

Obs : $f(\pm 2) = \pm 2$ donc graphe de f intersecte la 1ère bissectrice (graphe de Id) en ± 2 et 0.



(2) Hyp : $u_0 = 1$

$u_1 = 1^3 - 3\cdot 1 = -2$

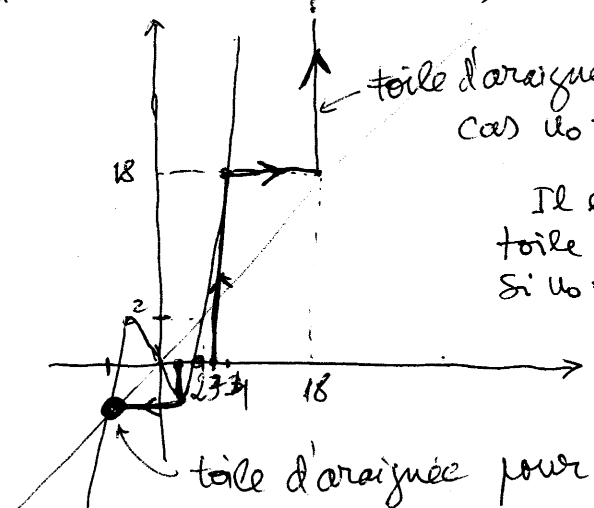
$u_2 = f(u_1) = f(-2) = -2$

et ainsi de suite, car -2 est point fixe pour f.

Conclusion : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par (R) et $u_0 = 1$ est stationnaire $= -2$ à partir de $n=1$, donc convergente vers $l = -2$. Toile d'araignée réduite à un seul point de xOy, à savoir $(-2,-2)$.

(3) Hyp : $u_0 = 3$

$u_1 = 3^3 - 3\cdot 3 = 3^2(3-1) = 18$; $u_2 = 2^3 \cdot 3^6 - 3\cdot 2\cdot 3^2 = 1926$



toile d'araignée pour le cas $u_0 = 3$

Il est évident de la toile d'araignée que si $u_0 = 3$ on a $u_n \to +\infty$.

toile d'araignée pour le cas $u_0 = 1$.

(4) Hyp : $u_0 > 2$.

(a) Initialisation : $u_1 = u_0[(u_0^2 - 4) + 1] > 2(0+1) = 2$.

Supposons $u_n > 2$ vraie. Alors $u_n^2 - 4 > 0$, donc $u_{n+1} = ((u_n^2-4)+1)u_n > 1\cdot 2 = 2$.

(b) $u_{n+1} - u_n = (u_n^2 - 4)u_n > 0\cdot 2 = 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

(c) NON. Contreexemple : $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ est strictement croissante et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 1 < \infty$.

(d) $d_n - d_{n-1} = u_{n+1}^3 - 4u_{n+1} - u_n^3 + 4u_n$

$= (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1}^2 + u_{n+1}u_n + u_n^2) - 4(u_{n+1} - u_n)$

$= (u_{n+1} - u_n)(u_{n+1}(u_{n+1} + u_n) + (u_n^2 - 4))$

$> (u_{n+1} - u_n)(2\cdot 4 + 0) \underset{(b)}{>} 0 \quad \forall n\in\mathbb{N}^*$.

Donc $d_{n+1} > d_n \ \forall n\in\mathbb{N}$ et, en particulier, $d_n > d_0$.

(e) (On va le faire par calcul direct. Par récurrence c'est également possible)

D'une part,

$\sum_{j=0}^{n} d_j = (u_{n+1} - u_n) + (u_n - u_{n-1}) + \ldots + (u_1 - u_0) = u_{n+1} - u_0$

et, d'autre part, en utilisant la question (d) :

$\sum_{j=0}^{n} d_j = \underbrace{d_n + d_{n-1} + \ldots + d_0}_{n+1 \text{ termes}} > d_0 + d_0 + \ldots + d_0 = (n+1)d_0$

Donc $u_n - u_0 > n d_0 \ \forall n\in\mathbb{N}$ i.e. u_n est minoré par le terme gén. d'une suite arithmétique de raison $d_0 = u_1 - u_0 > 0$. On a :

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n > (u_1 - u_0)\lim\limits_{n\to\infty} n + u_0 = \infty$. donc divergente.