Université de Cergy-Pontoise - L1 - S1 - MPI

Examen de Mathématiques pour les Sciences

Examen du 18 juin 2013 - $2^{\text{ème}}$ session – **Durée : 1h30**

Les documents, les téléphones portables, smartphones, tablettes et calculatrices ne sont pas autorisés

Le barème (4 + 4 + 6 + 6 pts.) est donné à titre indicatif et les exercices sont indépendants

Exercice 1. (4 points) Considérons les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Écrire ${}^{t}A$, ${}^{t}B$ (matrices transposées de A, resp. B) et calculer les produits $A{\cdot}B$, $B{\cdot}A$ et ${}^{t}B{\cdot}{}^{t}A$.

(b) Calculer les déterminants $\det(A{\cdot}B)$ et $\det(B{\cdot}A)$.

Exercice 2. (4 points)

(a) Donner le développement limité à l'ordre 4 en zéro de $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{1+x^2}$.

(b) Étudier la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-x^2}(\sin x - x)}{x\cos x - x}$.

Exercice 3. (6 points) Dans $\mathbb{R}^3$ muni d'un système cartésien de coordonnées fixé, on considère les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ donnés par:

$$\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + 3z = 4\}.$$

(a) Déterminer des vecteurs normaux aux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

(b) Justifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles.

(c) Donner une équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$, intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

(d) Donner une équation du plan $\widetilde{\mathcal{P}}$ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et passant par le point $M(1, 0, -1)$.

(e) Déterminer $\mathcal{I}$, l'intersection des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ et $\widetilde{\mathcal{P}}$.

Exercice 4. (6 points) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant la relation de récurrence

$$\text{(R)} \quad u_{n+1} = (u_n - 1)^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. **(a)** En supposant que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite l lorsque $n \to \infty$, donner les valeurs possibles pour cette limite. [Indication: on passera à la limite dans (R)]. On donne $\sqrt{5} \approx 2,24$.

   (b) Trouver l'expression d'une fonction f telle que l'on puisse écrire $u_{n+1} = f(u_n)$.

   (c) Étudier les variations de la fonction f et la représenter graphiquement.

2. Dans la suite on se propose d'étudier le comportement de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, à l'aide de la "toile d'araignée" dans des cas où les conditions initiales sont différentes. Dessiner des figures distinctes pour chacun des cas suivants, en choisissant l'échelle telle que la "toile d'araignée" soit visible et donner des explications.

   (a) Soit $u_0 = 2$. Quelle est la "toile d'araignée" dans ce cas ? La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet-t-elle une limite? Peut-on énumérer les élements de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

   (b) Supposons que $u_0 = \frac{1}{2}$. Calculer (comme fractions) u_1, u_2, u_3, u_4 et comparer u_1 à u_3, ensuite u_2 à u_4. En déduire un dessin de la "toile d'araignée" pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire (sans rigueur) la nature de la convergence de la suite dans ce cas.