Université de Cergy-Pontoise - L1 - MPI

Examen de Mathématiques pour les Sciences

Examen du 14 janvier 2012 - 1ère session – **Durée : 2h30**

Les documents, les téléphones portables et les calculatrices ne sont pas autorisés

Le barème (3 + 4 + 6 + 7 pts.) est donné à titre indicatif et les exercices sont indépendants

Certaines questions ayant un degré plus élevé de difficulté ont été signalées d'un astérisque

Exercice 1. (3 points) Soit les matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

(a) Calculer leur produit $P = A \cdot B$.

(b) Calculer son déterminant $\det P$.

(c) Préciser si la matrice P est inversible ou non.

Exercice 2. (4 points)

(a) Donner $DL_4(0)$ (développement limité à l'ordre 4 en zéro) des fonctions suivantes:

$$f(x) = \ln(1 + x^2), \quad g(x) = \sin(2x) \cdot \cos(x).$$

(b) Étudier la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x^2) - \sin(x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2}$.

[Indication: on pourrait mettre $\ln(x^2)$ sous la forme $\ln(1 + y(x))$ avec $y(x) \to 0$ quand $x \to 1$]

Exercice 3. (6 points) Soit $\mathcal{D}_1$ la droite d'équation $6x + 8y - 20 = 0$ et soit $\mathcal{D}_2$ la droite passant par le point $S = S(1; 2)$ et normale au vecteur $\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Trouver un vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}$ et une équation cartésienne de $\mathcal{D}_2$.

2. Montrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont un seul point d'intersection, à savoir $Q = Q(-2; 4)$.

3. Soit $B = B(a; b)$ un point du plan qui ne se trouve ni sur $\mathcal{D}_1$ ni sur $\mathcal{D}_2$, où a et b sont pour l'instant deux parametres réels.

(3.a) Calculer les projections orthogonales de B sur $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ qu'on notera par P_1 et P_2 (bien entendu, les coordonnées de ces deux points dépendent de a et b). Calculer également les longueurs des segments BP_1 et BP_2 (en termes de a, b).

(3.b)* Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b telle que QB soit bissectrice des angles formés par $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. [Indication: faire une figure et on pourrait utiliser la question (3.a) en demandant la congruence des triangles $\triangle QBP_1$ et $\triangle QBP_2$]

Exercice 4. (7 points)

On considère les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\text{(R)} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} - 3u_n = 1.$$

1. **(a)** En supposant qu'une telle suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite l lorsque $n \to \infty$, donner les valeurs possibles pour cette limite. [Indication: on passera à la limite dans (R)].

(b) Trouver l'expression d'une fonction f telle que l'on puisse écrire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = f(u_n)$. Trouver les points fixes.

(c) Dessiner la toile d'araignée pour le cas particulier des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vérifient (R) et telles que $u_1 = 1$.

(d) En déduire (sans démonstration!) si une telle suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ semble converger vers une des valeurs l trouvées à la question (1.a).

2.* **(a)** Trouver les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui vérifient la récurrence

$$(\mathrm{R}_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} - 3v_n = 0.$$

[Indication: on cherchera parmi les suites géométriques]

(b) Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle et soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = \lambda_n v_n$, où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la solution de la récurrence sans second membre (R_0) qui vérifie $v_1 = 1$. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie la récurrence (R) et $p_1 = 0$ si et seulement si la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie

$$(\star) \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n = 3^{-n} \qquad \text{et} \qquad \lambda_1 = 0.$$

(c) Vérifier que la suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ satisfaisant $(\star)$ a, $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, le terme général λ_n donné par la somme des $n-1$ premiers termes de la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\frac{1}{3}$. Calculer explicitement sa valeur et en déduire pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ l'expression de p_n.

(d) Déduire à partir de (2.a) et (2.c) l'expression de toutes les solutions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de (R). En déduire qu'une solution particulière évidente de (R) était la suite constante $-\frac{1}{2}$.

(e) Pour chaque l trouvé à la question (1.a), dire quelles suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ parmi celles vérifiant (R) convergent vers l.